关于 Dirichlet L-函数的四次加权均值公式

陈晓峰，张文鹏

(西北大学 数学系，陕西 西安　710069)

摘要：利用特征和的估计以及解析方法研究 Dirichlet L-函数一类四次加权均值，并且给出了两个较精确的渐近公式。

关 键 词：Gauss 和；Dirichlet L-函数；渐近公式

中图分类号：O156.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-274X(2001)01-0005-04

对于整数 $q\geqslant 3$，设 χ 表示模 q 的 Dirichlet 特征，$L(s,\chi)$ 表示对应于 χ 的 L- 函数，$L'(s,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 对复变量 s 的导数。我们定义 Gauss 和 $\tau(\chi)$ 如下

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{a}{q}\right),$$

其中 $e(y)=e^{2\pi yi}$。本文利用特征和的估计及解析方法研究了形如

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^{2k}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4$$

加权均值的估计问题，得到了一个较强的渐近公式：

定　理　设实数 $Q\geqslant 3$，则我们有渐近公式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^{2k}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=\frac{1}{2}Q^2\sum_{p}\frac{(p^2+1)\ln^4p}{p(p+1)(p^2-1)^2}+2Q^2\left(\sum_{p}\frac{\ln^2p}{p^2-1}\right)\left(\sum_{p}\frac{\ln^2p}{p(p+1)}\right)-2Q^2\sum_{p}\frac{(p^2-p+1)\ln^4p}{p^2(p^2-1)^2}+2Q^2\left(\sum_{p}\frac{\ln^2p}{p(p^2-1)}\right)^2+O(Q^{1+\epsilon})。$$

其中 $\varnothing(q)$ 是 Euler 函数，$\sum\limits_{\chi\neq\chi_0}$ 表示对模 q 的所有非主特征求和，$\sum\limits_{p}$ 表示对所有素数 p 求和，$\in$ 为任意给定的正数。

1　几个引理

为了完成定理的证明，我们需要下面几个引理。

引理 1　设 m,q 是整数且 $q\geqslant 3$。则有

$$\left|\sum_{a=1}^{q}e\left(\frac{ma}{q}\right)\right|\leqslant\sum_{d|(m,q)}d。$$

证明参阅文献[1]中引理 1。

引理 2　设实数 $Q\geqslant 3$，则有估计式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=\frac{1}{2}Q^2\sum_{p}\frac{(p^2+1)\ln^4p}{p(p+1)(p^2-1)^2}+2Q^2\left(\sum_{p}\frac{\ln^2p}{p^2-1}\right)\left(\sum_{p}\frac{\ln^2p}{p(p+1)}\right)-2Q^2\sum_{p}\frac{(p^2-p+1)\ln^4p}{p^2(p^2-1)^2}+2Q^2\left(\sum_{p}\frac{\ln^2p}{p(p^2-1)}\right)^2+O(Q\ln^5Q)。$$

其中 $\sum\limits_{p}$ 表示对所有素数 p 求和。

证明参阅文献[2]中定理 1 及定理 2。

引理 3　定义 $r(n)=\sum\limits_{d|n}\Lambda\left(\frac{n}{d}\right)$，其中 $\Lambda(n)$ 为 Mangoldt 函数，那么当 $m>1$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{r(n)r(mn)}{n^2}\leqslant 2\ln m\sum_{p}\frac{\ln^3p}{(p^2-1)^2}。$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}'$ 表示对所有与 q 互素的数求和。

证　明　由 Mangoldt 函数的性质可得到

$$r(n)=\begin{cases}2\ln p_1\ln p_2, & n=p_1^lp_2^k,\ l,k\geqslant 1;\\(l-1)\ln^2p, & n=p^l,\ l\geqslant 1;\\0, & \text{其他}。\end{cases}$$

这里 p_1、p_2 是两个不相同的素数。由此可得

收稿日期：1999-10-08

作者简介：陈晓峰(1976-)，男，陕西宝鸡人，西北大学硕士生，从事解析数论方面的研究。

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{r(n)r(mn)}{n^2} \leqslant$$

$$\sum_{p}\sum_{s=1}^{\infty} \frac{((s-1)\ln^2 p)\cdot(2\ln p\ln m)}{p^{2s}} =$$

$$2\ln m \cdot \sum_{p}\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)\ln^3 p}{p^{2s}} =$$

$$2\ln m \cdot \sum_{p} \frac{\ln^3 p}{(p^2-1)^2}$$

引理 4 取 $N=\exp(Q^{\epsilon})$,则有估计式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\cdot \Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant N}\frac{\overline{\chi}(m)\Lambda(m)}{m}\Big)^2\Big| \ll Q^{1+\epsilon}$$

证 明 定义 $r(n,N)=\sum\limits_{\substack{rs=n\\ r,s\leqslant N}}\Lambda(r)\Lambda(s)$,容易看出当 $n\leqslant N$ 时有 $r(n,N)=r(n)$。于是,由特征的正交性及引理 3 我们可以得到

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\cdot \Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\sum_{m\leqslant N}\frac{\overline{\chi}(m)\Lambda(m)}{m}\Big)^2 =$$

$$\varnothing(q)\sum_{n\leqslant N^2}{}'\sum_{\substack{m\leqslant N^2\\ \prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)n\equiv m(q)}}{}' \frac{r(n,N)r(m,N)}{nm} - \Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big)^4 \ll$$

$$\varnothing(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{r(n)r\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)n\Big)}{\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)n^2}+\ln^4 N+\varnothing(q)\cdot$$

$$\sum_{n\leqslant N^2}{}'\sum_{k\leqslant\frac{N^2}{q}}{}'\frac{r(n,N)r\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)n+kq,N\Big)}{n\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)n+kq\Big)} \ll$$

$$\varnothing(q)\frac{\ln\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)}{\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)}+\frac{\varnothing(q)}{q}\ln^5 N。$$

于是

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\cdot \Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant N}\frac{\overline{\chi}(m)\Lambda(m)}{m}\Big)^2\Big| \ll$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\varnothing(q)\ln q^k\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\frac{1}{l_i}+$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}(q\cdot d(q))^k\cdot\frac{\varnothing(q)}{q}\ln^5 N \ll Q^{1+\epsilon}。$$

引理 5 设实数 $Q\geqslant 3$,$(a,q)=1$,定义 $\psi(x,q,a)=\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a(q)}}\Lambda(n)$,那么对任意给定的 $A>0$,则有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,x\\ x\leqslant y\\ (a,q)=1}}\Big|\psi(x,q,a)-\frac{x}{\varnothing(q)}\Big| \ll$$

$$y(\ln y)^{-A}+y^{\frac{1}{2}}Q\ln^4(Qy)。$$

证明参阅文献[3]中定理 3。

引理 6 设实数 $Q\geqslant 3$,取 $N=\exp(Q^{\epsilon})$,则有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\cdot \Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi})}{y^2}dy\Big)^2\Big| \ll Q^{1+\epsilon}$$

其中 $A(y,\chi)=\sum\limits_{N<n\leqslant y}\chi(n)\Lambda(n)$。

证 明 由特征的定义及引理 5 我们可以得到估计

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\cdot \Big(\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi})}{y^2}dy\Big)^2=\int_N^{\infty}\int_N^{\infty}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\cdot$$

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\sum_{n_1\leqslant N}\frac{\chi(n_1)\Lambda(n_1)}{n_1}\cdot A(y,\overline{\chi})A(z,\overline{\chi})\Big)y^{-2}z^{-2}dydz=$$

$$\varnothing(q)\sum_{n\leqslant N}{}'\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{n_1\leqslant N}{}'\frac{\Lambda(n_1)}{n_1}\cdot \int_N^{\infty}\int_N^{\infty}\Big(\sum_{N<m\leqslant y}{}'\sum_{\substack{N<m_1\leqslant z\\ \prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)nn_1\equiv mm_1(q)}}{}'\Lambda(m)\Lambda(m_1)\Big)y^{-2}z^{-2}dydz -$$

$$\sum_{n\leqslant N}{}'\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{n_1\leqslant N}{}'\frac{\Lambda(n_1)}{n_1}\cdot \int_N^{\infty}\int_N^{\infty}A(y,\overline{\chi_0})A(z,\overline{\chi_0})y^{-2}z^{-2}dydz \leqslant$$

$$\varnothing(q)\sum_{n\leqslant N}{}'\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{n_1\leqslant N}{}'\frac{\Lambda(n_1)}{n_1}\int_N^{\infty}\int_N^{\infty}\sum_{N<m\leqslant y}{}'\Lambda(m)\times \sup_{\substack{a,t\\ t\leqslant z\\ (a,q)=1}}\Big|\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ m_1\equiv a(q)}}\Lambda(m_1)-\frac{1}{\varnothing(q)}\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ (m_1,q)=1}}\Lambda(m_1)\Big|。 y^{-2}z^{-2}dydz$$

于是

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\Big(\prod_{j=1}^{k}(l_j d_j+1)\Big)\cdot \Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi})}{y^2}dy\Big)^2\Big| \ll$$

$$Q^{1+\epsilon}\ln^2 N\int_N^{\infty}\int_N^{\infty}\sum_{N<m\leqslant y}{}'\Lambda(m)y^{-2}z^{-2}\times$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,t\\ t\leqslant z\\ (a,q)=1}}\left|\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ m_1\equiv a(q)}}\Lambda(m_1)-\frac{1}{\varnothing(q)}\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ (m_1,q)=1}}\Lambda(m_1)\right|\cdot \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

我们注意到

$$\sum_{N<m\leqslant y}{}' \Lambda(m)y^{-2}z^{-2}\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,t\\ t\leqslant z\\ (a,q)=1}}\left|\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ m_1\equiv a(q)}}\Lambda(m_1)-\frac{1}{\varnothing(q)}\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ (m_1,q)=1}}\Lambda(m_1)\right|\ll$$

$$y\left(z(\ln z)^{-20}+z^{\frac{1}{2}}Q\ln^4(Qz)\right)y^{-2}z^{-2}+ y\exp\left(-c(\ln z)^{\frac{1}{2}}\right)y^{-2}z^{-2}\ll\frac{yz(\ln z)^{-20}}{y^2z^2}。$$

注意到 y,z 的对称性。由上式我们立即有

$$\sum_{N<m\leqslant y}{}' \Lambda(m)y^{-2}z^{-2}\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,t\\ t\leqslant z\\ (a,q)=1}}\left|\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ m_1\equiv a(q)}}\Lambda(m_1)-\frac{1}{\varnothing(q)}\sum_{\substack{N<m_1\leqslant t\\ (m_1,q)=1}}\Lambda(m_1)\right|\ll\frac{yz(\ln y\ln z)^{-9}}{y^2z^2}。$$

于是有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\cdot\left(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\right)^2\left(\int_N^\infty\frac{A(y,\bar\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right)^2\right|\ll$$

$$Q^{1+\epsilon}\int_N^\infty\int_N^\infty\frac{yz(\ln y\ln z)^{-9}}{y^2z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ll Q^{1+\epsilon}。$$

引理 7　取 $N=\exp(Q^\epsilon)$，则有估计式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\cdot\left|\int_N^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right|^4\right|\ll Q^{1+\epsilon}。$$

证　明　由不等式的性质及文献中[2]引理 6 可得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\cdot\left|\int_N^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right|^4\right|\leqslant$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\int_N^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right|^4\leqslant$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}(q\cdot d(q))^k\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\int_N^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right|^4\leqslant$$

$$Q^\epsilon\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\int_N^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right|^4\leqslant Q^{1+\epsilon}。$$

这样我们便证明了引理 7。

引理 8　取 $N=\exp(Q^\epsilon)$，则有估计式

(1) $$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\cdot\left|\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\right|^2\left|\int_N^\infty\frac{A(y,x)}{y^2}\mathrm{d}y\right|^2\right|\ll Q^{1+\epsilon}。$$

(2) $$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\cdot\left(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\right)^2\left(\sum_{m\leqslant N}\frac{\bar\chi(m)\Lambda(m)}{m}\right)\cdot\int_N^\infty\frac{A(y,\bar\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right|\ll Q^{1+\epsilon}。$$

(3) $$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\cdot\left(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\right)\int_N^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\left(\int_N^\infty\frac{A(y,\bar\chi)}{y^2}\mathrm{d}y\right)^2\right|\ll Q^{1+\epsilon}。$$

用证明引理 6，引理 7 的方法可以得到引理 8。

2　定理的证明

这节我们将完成定理的证明。首先由 Gauss 和的定义及引理 1 我们有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^{2k}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{a}{q}\right)\sum_{b=1}^{q}\bar\chi(b)e\left(-\frac{b}{q}\right)\right)^k\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{a=1}^{q}{}'\cdot\sum_{b=1}^{q}{}'\chi(a)\bar\chi(b)e\left(\frac{a-b}{q}\right)\right)^k\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=$$

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{c=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'\chi(c)e\left(\frac{bc-b}{q}\right)\right)^k\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=$$

$$\varnothing^k(q)\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4+\prod_{i=1}^{k}\sum_{c_i=2}^{q}{}'\sum_{b_i=1}^{q}{}' e\left(\frac{b_ic_i-b_i}{q}\right)\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}c_j\right)\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4\right)=$$

$$\varnothing^k(q)\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4+O\left(\prod_{i=1}^{k}\sum_{c_i=2}^{q}{}'\sum_{d_i|(q,c_i-1)}{}' d_i\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}c_j\right)\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4\right|\right)=$$

$$\varnothing^k(q)\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4+O\left(\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi\left(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)\right)\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4\right|\right)。$$

对给定的常数 N，由 Abel 恒等式我们有

$$\frac{L'}{L}(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}=$$

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}+\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y,$$

其中 $A(y,\chi)=\sum_{N<n\leqslant y}\chi(n)\Lambda(n)$。于是由引理 4,引理 6,引理 7 及引理 8 我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^{2k}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4=$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\frac{L'}{L}(1,\chi)\right|^4+$$

$$O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)).$$

$$\Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\sum_{m\leqslant N}\frac{\overline{\chi}(m)\Lambda(m)}{m}\Big)^2\Big|\Big)+$$

$$O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)).$$

$$\Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi})}{y^2}dy\Big)^2\Big|\Big)+$$

$$O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)).$$

$$\Big|\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}dy\Big|^4\Big|\Big)+$$

$$O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(\cdot\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)).$$

$$\Big|\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big|^2\Big|\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}dy\Big|^2\Big|\Big)+$$

$$O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)).$$

$$\Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)^2\Big(\sum_{m\leqslant N}\frac{\overline{\chi}(m)\Lambda(m)}{m}\Big).$$

$$\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi})}{y^2}\mathrm{d}y\Big|\Big)+$$

$$O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varnothing^{k+1}(q)}\prod_{i=1}^{k}\sum_{d_i|q}d_i\sum_{l_i=1}^{\frac{q-1}{d_i}}\Big|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(\prod_{j=1}^{k}(l_jd_j+1)).$$

$$\Big(\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}\Big)\Big(\int_N^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big).$$

$$\Big(\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi})}{y^2}\mathrm{d}y\Big)^2\Big|\Big)=$$

$$\frac{1}{2}Q^2\sum_p\frac{(p^2+1)\ln^4p}{p(p+1)(p^2-1)^2}+$$

$$2Q^2\Big(\sum_p\frac{\ln^2p}{p^2-1}\Big)\Big(\sum_p\frac{\ln^2p}{p(p+1)}\Big)-$$

$$2Q^2\sum_p\frac{(p^2-p+1)\ln^4p}{p^2(p^2-1)^2}+$$

$$2Q^2\Big(\sum_p\frac{\ln^2p}{p(p^2-1)}\Big)^2+O(Q^{1+\epsilon})。$$

参考文献:

[1] 张文鹏.关于 Dirichlet L-函数与 Gauss 和[J].咸阳师范专科学校学报,1998,13(6):1-5.

[2] ZHANG W P. A new mean value formula of Dirichlet L-functions[J]. Science in China(A),1992,35(10):1 173-1 179.

[3] VAUGHAN R C. An elementary method in prime number theory[J]. Recent Progress in Analytic Number Theory, 1981,1:341-347.

(编 辑 曾大刚)

On the 4-th weighted mean value formulas of Dirichlet L-functions

CHEN Xiao-feng, ZHANG Wen-peng

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: The 4-th weighted mean value of Dirichlet L-functions is studied by using the estimates for character sums and the analytic methods, and two sharper asymptotic formulas are given.

Key words: Gauss sums; Dirichlet L-functions; asymptotic formula