

⑦
22-26基于小波变换的多传感器多分辨分布式滤波[†]文成林¹⁾ 张书玲²⁾ 施晨鸣³⁾ 张洪才³⁾TP212
TN713

(1)河南大学数学系,河南开封,475001;2)西北大学数学系,西安,710069;3)西北工业大学自动控制系,西安,710072)

摘要 用小波变换和多分辨分析的思想建立一个最优的和动态的多分辨分布式滤波算法,最优是建立在估计误差方差最小的意义下的,而动态是当新的测量数据到来时,根据已有的估计预测值的测量值获得新的估计值。介绍了离散小波变换,给出了动态系统的描述,建立了基于小波变换最优和动态的多分辨分布式滤波算法,最后用一个例子说明算法的有效性。

关键词 多分辨分析;小波变换;传感器;Kalman滤波

分类号 TN957.51 **文献标识码** A **论文编号** 1000-274X(1999)01-0022-26

分布式滤波

1 离散小波变换

多分辨分析的基本思想是:将待处理的信号用正交变换的方法在不同的分辨级别上进行分解,分解到低一分辨级上的信号称之为平滑信号;在高一分辨级上存在,而在低一分辨级上消失的信号称之为细节信号。小波变换是连接信号在各个不同分辨级上的桥梁。

现在考虑在分辨级 i 上一个长度有限的 n 维随机向量数据块 $X_{V_m}(i)$ (长度是 $M_i = 2^{i-1}$)

$$X_{V_m}(i) = [x_{V_m}^T(mM_i + 1), x_{V_m}^T(mM_i + 2), \dots, x_{V_m}^T(mM_i + M_i)]^T \quad (1)$$

其中下标 m 表示第 m 个数据块, V 表示相应分辨级上的平滑信号。为了使 $X_{V_m}(i)$ 符合小波变换所需要的形式,需要引入一线性变换。例如,两个二维向量序列 $X(k) = [(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})]^T$, 其线性变换很容易写成如下形式

$$[x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}] = L_i X(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) \quad (2)$$

因此,小波变换的分解形式可写成算子形式

$$X_{V_m}(i-1) = L_{i-1}^T \text{diag}\{H_{i-1}, \dots, H_{i-1}\} L_i X_{V_m}(i) \quad (3)$$

$$X_{D_m}(i-1) = L_{i-1}^T \text{diag}\{G_{i-1}, \dots, G_{i-1}\} L_i X_{V_m}(i) \quad (4)$$

其中,下标 D 表示相应分辨级上的细节信号, H_{i-1} 和 G_{i-1} 是从级 i 到级 $i-1$ 的尺度算子和小波算子,且有性质

$$H_{i-1}^T H_{i-1} + G_{i-1}^T G_{i-1} = I \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} H_{i-1} H_{i-1}^T & H_{i-1} G_{i-1}^T \\ G_{i-1} H_{i-1}^T & G_{i-1} G_{i-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (6)$$

对角子矩阵的个数与信号的维数相同。 L_{i-1}^T 是把变换到 $i-1$ 级上的信号再变成(1)形式的线性变换。同样,重构形式也可以写成算子形式

$$X_{V_m}(i) = L_i^T \text{diag}\{H_{i-1}^T, \dots, H_{i-1}^T\} L_{i-1} X_{V_m}(i-1) + L_i^T \text{diag}\{G_{i-1}^T, \dots, G_{i-1}^T\} L_{i-1} X_{D_m}(i-1) \quad (7)$$

2 系统描述

本文给出具有 4 个传感器的动态系统

$$x(4, k+1) = A(4)x(4, k) + w(4, k) \quad (8)$$

$$z(i, k) = C(i)x(i, k) + v(i, k), i=4, 3, 2, 1. \quad (9)$$

其中, i 表示分辨级数(式中 4 表示最高分辨级), $x(i, k) \in R^{n \times 1}$ 是在分辨级 (i) 上的 n 维状态向量, $A(4) \in R^{n \times n}$ 是系统矩阵,并假设在同一分辨级上是定常矩阵。 $w(4, k) \in R^{n \times 1}$ 表示模型误差的随机过程,具有

$$\begin{cases} E\{w(4, k)\} = 0, \\ E\{w(4, k)w^T(4, k)\} = Q(4). \end{cases} \quad (10)$$

[†] 收稿日期:1997-08-31

基金来源:国家自然科学基金(No. 69575015)和河南省自然科学基金资助项目

作者简介:文成林(1963-),男,西北工业大学自动控制系博士生

在不同的分辨级(i)上是通过传感器 i 对状态变量 $x(i, k)$ 进行观测的,其观测值的 $z(i, k)$,用 $C(i) \in R^{q \times n}$ 表示分辨级(i)上的传感器,其相应的测量误差 $v(i, k) \in R^{q \times 1}$,即

$$\begin{cases} E\{v(i, k)\} = 0 \\ E\{v(i, k)v^T(i, k)\} = R(i) \end{cases} \quad i = 4, 3, 2, 1. \quad (11)$$

在最高分辨级(4)上,(8)给出了系统的动态方程,状态向量 $x(4, k)$ 的初始值是均值为 x_0 的随机向量

$$\begin{cases} E\{x(0)\} = x_0, \\ E\{(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T\} = P_0. \end{cases} \quad (12)$$

假设 $x(0), w(4, k), v(1, k), v(2, k), v(3, k), v(4, k)$ 都是相互独立的。

下标注释 一个多分辨系统是一个相当复杂的系统,它包含有 4 个下标:分辨级下标 $i(i=4$ 表示最高分辨级)、传感器下标 s ;每个分辨级上又有两组下标:时间序列下标 k 和块序列下标 m ; $z(i, k)$ 表示分辨级 i 上 k 时刻的测量, $x(i, k)$ 是 $x(4, k)$ 在分辨级 i 上的正交分解, $\hat{x}(i, k|k)$ 表示 $x(i, k)$ 的估计值, $\hat{x}(i, k+1|k)$ 表示 $x(i, k)$ 的预测值;数据块的长度由分辨级数确定: $M_i = 2^{i-1}, i = 4, 3, 2, 1$ 。

3 最优和动态多分辨分布式滤波

最高分辨级是 4,所以我们将原始状态 $x(4, k)$ 分解成分辨级 i 上的平滑信号 $x_p(i, k)$ 和相应的细节信号 $x_D(i, k)(i=3, 2, 1)$ 。为了描述算子,假设在最高分辨级 4 上,数据块 $X_m(4)$ 的估计值 $\hat{X}_{m|m}(4)$ 和估计误差方差 $P_{m|m}(4)$ 已得到。在计算时,需要利用数据块的初始条件 $X_{0|0}(4)$ 和 $P_{0|0}(4)$,而它们可以从式(8)和(12)得到(为了叙述方便,以下 $A_i = A(4)$)

$$\hat{X}_{0|0}(4) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{0|0}(4, 1) \\ \hat{x}_{0|0}(4, 2) \\ \vdots \\ \hat{x}_{0|0}(4, 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(4) \\ A^2(4) \\ \vdots \\ A^8(4) \end{bmatrix} x_0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_{0|0}(4) &= E\{[X_{0|0}(4) - \hat{X}_{0|0}(4)] \\ &\quad [X_{0|0}(4) - \hat{X}_{0|0}(4)]^T\} \\ &= \begin{bmatrix} A(4) \\ A^2(4) \\ \vdots \\ A^8(4) \end{bmatrix} P_0 \begin{bmatrix} A(4) \\ A^2(4) \\ \vdots \\ A^8(4) \end{bmatrix} + B_0 Q_0 B_0^T, \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

$$B_0 =$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(4) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^2(4) & A(4) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^3(4) & A^2(4) & A(4) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^4(4) & A^3(4) & A^2(4) & A(4) & I & 0 & 0 & 0 \\ A^5(4) & A^4(4) & A^3(4) & A^2(4) & A(4) & I & 0 & 0 \\ A^6(4) & A^5(4) & A^4(4) & A^3(4) & A^2(4) & A(4) & I & 0 \\ A^7(4) & A^6(4) & A^5(4) & A^4(4) & A^3(4) & A^2(4) & A(4) & I \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q_0(4) &= \text{diag}[Q(4), Q(4), Q(4), Q(4), \\ &\quad Q(4), Q(4), Q(4), Q(4)]. \end{aligned} \quad (16)$$

3.1 由第 m 块的值预测第 $m+1$ 块的值

在最高分辨级 4 上若已得到第 m 块的估计值 $\hat{X}_{v|m}(4)$ 和 $P_{m|m}(4)$,我们将对第 $m+1$ 块的值进行预测,得到 $\hat{X}_{v|m+1}(4)$ 和 $P_{m+1|m}(4)$

$$\hat{X}_{v|m+1}(4) = A_m(4)\hat{X}_{v|m}(4) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{v|m+1}(4) &= X_{v|m+1}(4) - \hat{X}_{m+1|m}(4) \\ &= A_m(4)[X_{v|m}(4) - \hat{X}_{v|m}(4)] + B_m(4)w(4), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P_{m+1|m}(4) &= E\{[\hat{X}_{v|m+1}(4) - \hat{X}_{m+1|m}(4)] \\ &\quad [\hat{X}_{v|m+1}(4) - \hat{X}_{m+1|m}(4)]^T\} \\ &= A_m(4)P_{m|m}(4)A_m^T(4) + B_m(4)Q_m(4)B_m^T(4). \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_m(4) &= \text{diag}[Q, Q, Q, Q, Q, Q, \\ &\quad Q, Q, Q, Q, Q, Q, Q, Q]. \end{aligned} \quad (20)$$

$$A_m(4) = \text{diag}[A^3, A^3, A^3, A^3, A^3, A^3, A^3, A^3]. \quad (21)$$

$$B_m(4) = \begin{bmatrix} A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 0 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 0 0 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 0 0 0 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 0 0 0 0 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I 0 0 0 0 0 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 A^7 A^6 A^5 A^4 A^3 A^2 A I \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.2 从高分辨级向低分辨级的分解

用小波变换将 $\hat{X}_{v|m+1}(4)$ 分解到分辨级($i=3, 2, 1$)上,生成 $X_{v|m+1}(i)$ 和相应的细节信号 $\hat{X}_{Dm+1}(i)$

$$\hat{X}_{v|m+1}(3) = L_3^T \text{diag}[H_3, \dots, H_3] L_4 \hat{X}_{v|m+1}(4), \quad (23)$$

$$\hat{X}_{Dm+1}(3) = L_3^T \text{diag}[G_3, \dots, G_3] L_4 \hat{X}_{v|m+1}(4), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{V_{m+1}m}(2) &= L_2^T \text{diag}[H_2, \dots, H_2] L_3 \hat{X}_{V_{m+1}m}(3) \\ &= L_2^T \text{diag}[H_2 H_3, \dots, H_2 H_3] L_4 \hat{X}_{V_{m+1}m}(4), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{D_{m+1}m}(2) &= L_2^T \text{diag}[G_2, \dots, G_2] L_3 \hat{X}_{V_{m+1}m}(3) \\ &= L_2^T \text{diag}[G_2 H_3, \dots, G_2 H_3] L_4 \hat{X}_{V_{m+1}m}(4), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{1_{m+1}m}(1) &= L_1^T \text{diag}[H_1, \dots, H_1] L_2 \hat{X}_{m+1m}(2) \\ &= L_1^T \text{diag}[H_1 H_2 H_3, \dots, H_1 H_2 H_3] L_4 \hat{X}_{V_{m+1}m}(4), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{D_{m+1}m}(1) &= L_1^T \text{diag}[G_1, \dots, G_1] L_2 \hat{X}_{m+1m}(2) \\ &= L_1^T \text{diag}[G_1 H_2 H_3, \dots, G_1 H_2 H_3] L_4 \hat{X}_{V_{m+1}m}(4). \end{aligned} \quad (28)$$

V. 上的误差协方差是

$$\begin{aligned} P_{m+1|m}(i) &= L_i^T \text{diag}\{H_i, \dots, H_i\} L_{i+1} P_{m+1|m} \\ &\quad (i+1) L_{i+1}^T \text{diag}\{H_i^T, \dots, H_i^T\} L_i. \end{aligned} \quad (29)$$

其中, 上式对角子阵的个数是 n 个, 第 $m+1$ 块的测量预测值是

$$\hat{Z}_{m+1|m}(i) = C_{m+1}(i) \hat{X}_{m+1|m}(i), i = 3, 2, 1. \quad (30)$$

其中

$$C_{m+1}(4) = \text{diag}[C(4), C(4), C(4), C(4), C(4), C(4)] \quad (31)$$

$$C_{m+1}(3) = \text{diag}[C(3), C(3), C(3), C(3)] \quad (32)$$

$$C_{m+1}(2) = \text{diag}[C(2), C(2)] \quad (33)$$

$$C_{m+1}(1) = \text{diag}[C(1)]. \quad (34)$$

3.3 各个分辨级上的数据更新

在分辨级 i 上第 $m+1$ 块的状态预测值是 $\hat{X}_{V_{m+1}m}(i)$ ($i=3, 2, 1$), 预测误差方差是 $P_{V_{m+1}m}(i)$ ($i=3, 2, 1$). 当第 $m+1$ 块的实际观测值 $Z_{V_{m+1}m}(i)$ 到来时, 我们用传统的 Kalman 滤波对其预测值(17), (23), (25), 及(27)进行更新, 得到第 $m+1$ 块的最优估计值

$$\begin{aligned} \hat{X}_{1_{m+1}m+1}(i) &= \hat{X}_{V_{m+1}m}(i) + K_{m+1}(i) [Z_{V_{m+1}m}(i) \\ &\quad - C_{m+1}(i) \hat{X}_{V_{m+1}m}(i)], i = 4, 3, 2, 1. \end{aligned}$$

其中, $K_{m+1}(i)$ 为待定的最优增益阵

$$\begin{aligned} K_{m+1}(i) &= P_{V_{m+1}m}(i) C_{m+1}^T(i) \\ &\quad [C_{m+1}(i) P_{V_{m+1}m}(i) C_{m+1}^T(i) + R_{m+1}(i)]^{-1}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} P_{V_{m+1}m+1}(i) &= [I - K_{m+1}(i) C_{m+1}(i)] \\ &\quad P_{V_{m+1}m}(i) [I - K_{m+1}(i) C_{m+1}(i)]^T; \end{aligned} \quad (36)$$

$$R_{m+1}(4) = \text{diag}[R(4),$$

$$R(4), R(4), R(4), R(4), R(4), R(4), R(4)]; \quad (37)$$

$$R_{m+1}(3) = \text{diag}[R(3), R(3), R(3), R(3)]; \quad (38)$$

$$R_{m+1}(2) = \text{diag}[R(2), R(2)]; \quad (39)$$

$$R_{m+1}(1) = \text{diag}[R(1)]. \quad (40)$$

在分辨级 i 上, 用 Kalman 滤波进行局部更新是最优估计过程。注意到细节信号 $\hat{X}_{D_{m+1}m}(1)$, $\hat{X}_{D_{m+1}m}(2)$, $\hat{X}_{D_{m+1}m}(3)$ 并没有更新。但为了记的方便, 它们也随之变化为 $\hat{X}_{D_{m+1}m+1}(1)$, $\hat{X}_{D_{m+1}m+1}(2)$, $\hat{X}_{D_{m+1}m+1}(3)$ 。

3.4 从分辨级 i ($i=3, 2, 1$) 开始的多级重构

从分辨级 i 开始, 用小波逆变换把更新过的数据 $\hat{X}_{V_{m+1}m+1}(i)$ 和细节信号 $\hat{X}_{D_{m+1}m+1}(i)$, $\hat{X}_{D_{m+1}m+1}(i+1)$, \dots , $\hat{X}_{D_{m+1}m+1}(3)$ 进行综合得到最高分辨级上状态的估计值

$$\begin{aligned} \hat{X}_{m+1m+1}(4) &= \\ & L_4^T \text{diag}\{T^T(i), \dots, T^T(i)\} L_4 \begin{bmatrix} \hat{X}_{V_{m+1}m+1}(i) \\ \hat{X}_{D_{m+1}m+1}(i) \\ \vdots \\ \hat{X}_{D_{m+1}m+1}(3) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{其中 } T^T(i) = \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^{i-3} H_j \\ \vdots \\ G_i \prod_{j=1}^{i-3} H_j \\ \vdots \\ G_3 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

注意上标 i 是用来表示信号从分辨级 i 到最高分辨级 4 的综合。

4 例子与仿真

4.1 例子

对一个 CV 模型的动态系统进行计算机仿真, 其状态变量是

$$x(k) = [x_1(k), x_2(k), x_1(k), x_2(k)]^T.$$

系统的动态矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其中, T 是采样间隔。过程噪声的协方差阵是

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 1/4T^4 & 0 & 1/2T^3 & 0 \\ 0 & 1/4T^4 & 0 & 1/2T^3 \\ 1/2T^3 & 0 & T^2 & 0 \\ 0 & 1/2T^3 & 0 & T^2 \end{bmatrix} O^2.$$

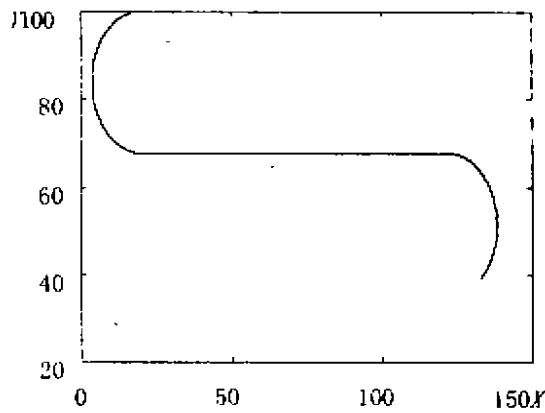


图 1 目标状态的真实轨迹

Fig.1 Real Lows of Target State

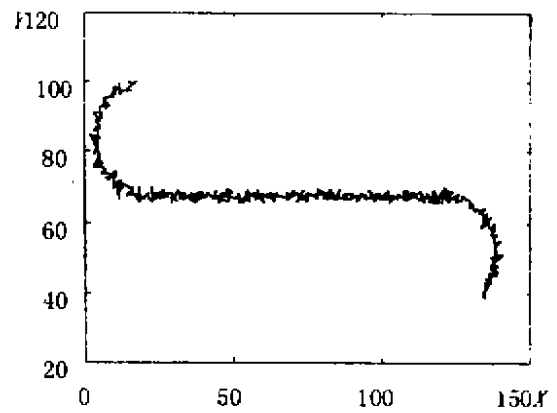


图 2 原始分辨率(4)上得到的实际测量值

Fig.2 Practical Measure Obtained on the Original Resolution (4)

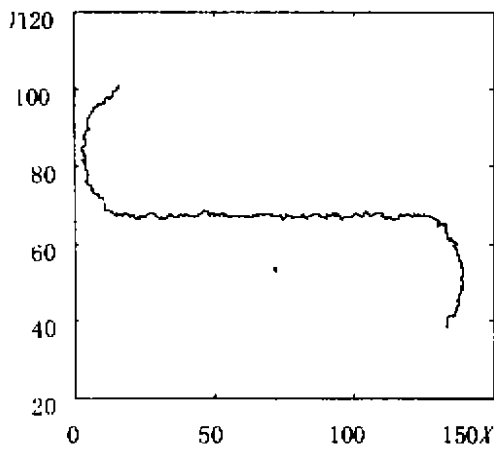


图 3 在原始分辨率(4)上直接 Kalman 滤波的结果

Fig.3 Result of Direct Kalman Filter on the Original Resolution (4) (Non Decomposition)

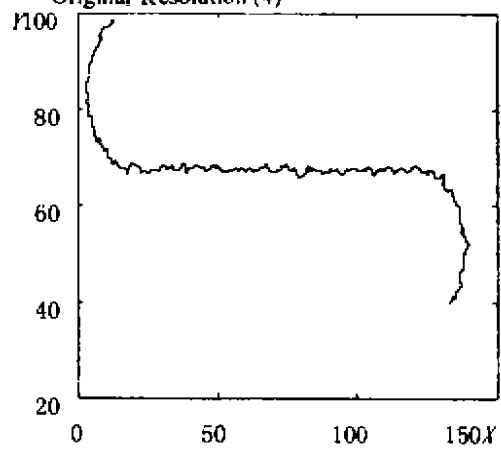


图 4 在分辨率(3)上 Kalman 滤波后再重构的结果 (分解一次)

Fig.4 Result of Reconstruction after Filter on Resolution (3) (Decomposed Only Once)

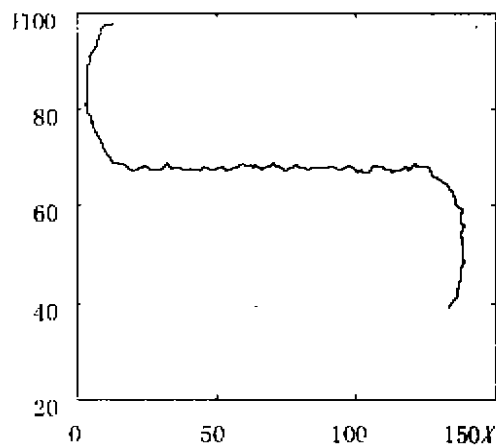


图 5 在分辨率(2)上 Kalman 滤波后再重构的结果 (分解 2 次)

Fig.5 Result of Reconstruction after Kalman Filter on Resolution (2) (Decomposed Twice)

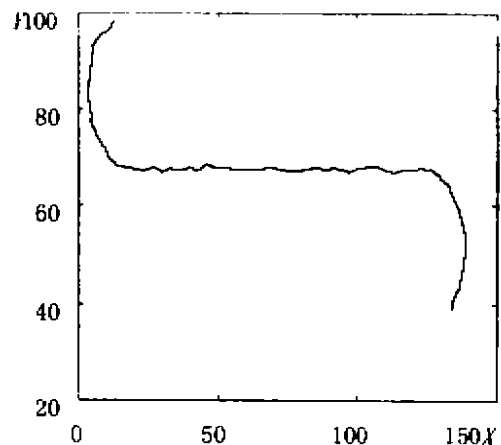


图 6 在分辨率(1)上 Kalman 滤波后再重构的结果 (分解 3 次)

Fig.6 Result of Reconstruction after Kalman Filter on Resolution (1) (Triple Decomposed)

测量矩阵是

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

测量噪声方差阵是

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix};$$

$$x_0 = [20\ 000, 100\ 000, -400, 0]^T;$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10\ 000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10\ 000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\ 000 \end{bmatrix}.$$

其中 $T = 1s$, $C = 3 \cdot 9.8\ m/s^2$, $r = 10\ 000\ m^2$.

4.2 仿真结果

我们分别用 Daubechies 2-tap 和 4-tap 滤波器

对该算法进行仿真实验,结果表明此算法是非常有效的。文中的附图给出了使用 Daubechies 4-tap 滤波器仿真的结果:图 1 是目标状态的真实轨迹;图 2 是在原始分辨级(4)上得到的实际测量值;图 3 是在原始分辨级(4)上直接 Kalman 滤波的结果(分解零次);图 4 是在分辨级(3)上 Kalman 滤波后再重构的结果(分解 1 次);图 5 是在分辨级(2)上 Kalman 滤波后再重构的结果(分解 2 次);图 6 是在分辨级(1)上 Kalman 滤波后再重构的结果(分解 3 次)。从图中可看出,其滤波效果随着分解次数的增加而有明显的改进。

参 考 文 献

- 1 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1988,41:906~996
- 2 Rioul O. Wavelet and Signal Processing. *IEEE Signal Proc.*, 1991,8(4):14~23
- 3 Hong L. Adaptive distributed filtering in multi-coordinated wavelets. *IEEE Trans.*, 1991,27(3):715~724
- 4 Hong L. Distributed filtering using set models. *IEEE Trans. Aerosp. Electro. Systems*, 1992,28(4):1 144~1 153

(编辑 姚 远)

Multiresolutional Sensor Distributed Filtering Using Wavelet Transform

WEN Chenglin¹⁾ ZHANG Shuling²⁾ SHI Chenming³⁾ ZHANG Hongcai³⁾

(1)Department of Mathematics, He'nan University, Kaifeng, He'nan, 475001;

2)Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, 710069;

3)Department of Automatic Control, Northwest Polytechnical University, Xi'an, 710072)

Abstract An algorithm for optimal and dynamic multiresolutional sensor distributed filtering is proposed using the thought of wavelet transform and multiresolutional analysis. The word optimal is in the sense of minimizing the estimate error variance and the word dynamic is in the sense that when new measurement data are acquired, new estimates can be derived based on the previously estimated and new measurements. It is organized as follows: the discrete wavelet transform is introduced in Section I and the problem is formulated in Section I. The algorithm for optimal and dynamic multiresolutional distributed filtering is presented in Section II and an example is given in Section IV to illustrate the effectiveness of the algorithm.

Keywords multiresolutional analysis; wavelet transform; sensor; Kalman filtering