函数的α-多项式逼近

侯再恩[1,2], 王晓瑛[1,3]

(1 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049; 2 陕西科技大学 基础部, 陕西 咸阳 712081; 3 西北大学 数学系, 陕西 西安 710069)

摘要: 提出用α-多项式进行函数逼近的问题, 首先给出广义的伯恩斯坦多项式, 利用它证明了α-多项式逼近定理, 即: 对于闭区间$[a, b]$上的连续函数$f(x)$, 存在α-多项式序列$\{p_n(x, \alpha)\}$, 使$\{p_n(x, \alpha)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$。从理论上解决用α-多项式进行函数逼近的问题。最后用数值例子说明对于有些数据用α-多项式($\alpha \neq 1$)进行函数逼近效果会更好。

关 键 词: 函数逼近; 伯恩斯坦多项式; 一致收敛
中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1000-274X(2002)04-0465-03

在函数逼近(函数插值或数据拟合)中, 在未知函数类型的情况下, 常用多项式函数

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (1)$$

来进行, 这一方面是由于多项式函数$P_n(x)$简单且容易求值, 而更重要的原因是有韦尔斯特拉斯函数逼近定理[1](若函数在$f(x)$闭区间$[a, b]$上的连续函数, 则存在多项式序列$\{P_n(x)\}$, 使$\{P_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$.), 从理论上给了有力的保证。但是, 这样的多项式序列是不是最好的, 或者说是否可以用更一般的α-多项式

$$P_n(x, a) = a_0 + a_1x^{\alpha} + a_2x^{2\alpha} + \cdots + a_nx^{n\alpha} \quad (2)$$

来进行函数逼近, 其中$\alpha > 0$。显然, 当$\alpha = 1$时, (2)式与式(1)相同。下面首先对伯恩斯坦多项式进行了改造, 然后证明了: 若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上的连续函数, 则存在α-多项式序列$\{P_n(x, \alpha)\}$, 使$\{P_n(x, \alpha)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$。最后用数值例子说明对有些数据选取适当的α会使逼近效果更好。

1 广义伯恩斯坦多项式与逼近定理

由式(2)可知, 对于任意的实数$\alpha > 0$, 只有当$x \geq 0$时, 式(2)才有意义。所以, 对式(2)对应的闭区间应为$[a, b] \subset [0, +\infty]$, 下面讨论不妨取为$[a, b] = [0, 1]$。而任意的区间可以用适当的变换变为满足上述要求的区间。

1.1 广义伯恩斯坦多项式

Bernstein多项式在理论推导和数值计算中经常用到[1~3], 为了给出用α-多项式逼近连续函数的逼近定理, 下面对Bernstein多项式进行改造, 给出广义伯恩斯坦多项式。

定 义 设函数$f(x)$在闭区间$[0, 1]$上连续, 对$\alpha > 0$, 令

$$B_n(x, f, \alpha) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) C_n^k x^{k\alpha}(1 - x^{\alpha})^{n-k},$$

称其为广义伯恩斯坦多项式, 或称为伯恩斯坦α-多项式。当$\alpha = 1$时,

$$B_n(x, f, 1) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} = B_n(x, f),$$

即为伯恩斯坦多项式。

1.2 逼近定理

定 理 设函数$f(x)$在闭区间$[0, 1]$上连续, 对$\alpha > 0$, 令

$$B_n(x, f, \alpha) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) C_n^k x^{ka}(1 - x^{a})^{n-k},$$

则$B_n(x, f, \alpha)$在$[0, 1]$上一致收敛于$f(x)$。

证 明 对于任何的$x \in [0, 1]$,

收稿日期: 2002-04-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971066)
作者简介: 侯再恩(1959-), 男, 陕西华县人, 陕西科技大学副教授, 西安交通大学博士生, 从事最优化理论与应用的研究。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x)C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k},$$

所以 $B_n(x,f,\alpha)-f(x)=$

$$\sum_{k=0}^{n}[f((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}})-f(x)]C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k}。$$

因为 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 当然在 $[0,1]$ 上一致连续, 所以, 对于任给的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得, 当 $x-x'\in[0,1]$ 且 $|x,x'|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\epsilon}{2}。$$

令 $A=\{k\,|\,|(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x|<\delta\}$,

$B=\{0,1,2,\cdots,n\}-A$, 则

$$|B_n(x,f,\alpha)-f(x)|\le\sum_{k\in A}|f((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}})-f(x)|C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k}+\sum_{k\in B}|f((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}})-f(x)|C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k}。\qquad(3)$$

对不等式(3)的右边第一项有

$$\sum_{k\in A}|f((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}})-f(x)|C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k}<\frac{\epsilon}{2}\sum_{k\in A}C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k}\le\frac{\epsilon}{2}\sum_{k\in A}C_n^k x^{ka}(1-x^a)^{n-k}=\frac{\epsilon}{2}。$$

为了给出不等式(3)的右边第二项的估计, 下面给出两个引理。

引理1 对于上述的 $\delta>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $|(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x|\ge\delta$ 时, 有 $|\frac{k}{n}-x^\alpha|\ge\delta_1$ 成立。

证明 分 $\alpha=1$, $0<\alpha<1$ 及 $\alpha>1$ 等3种情况给出证明。

1) 当 $\alpha=1$ 时, 取 $\delta_1=\delta$ 即可。

2) 先证 $0<\alpha<1$ 的情形。设 $|(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x|\ge\delta$, 即有 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x\ge\delta$ 或 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x\le-\delta$ 成立。

(i) 若 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x\ge\delta$ 成立, 则有 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta\ge x$, 即 $((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta)^\alpha\ge x^\alpha$ 记此不等式的左端为 $\frac{k}{n}-\delta'$, 则有 $\frac{k}{n}-\delta'\ge x^\alpha$, 其中 $\delta'=\frac{k}{n}-((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta)^\alpha$, 显然这里 $k\ne0$, 令 $y=\frac{t}{n}-((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta)^\alpha$, $t\in[1,n]$, 因为,

$$y'=\frac{1}{n}-\alpha((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta)^{\alpha-1}\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{n}=$$

$$\frac{1}{n}(1-\frac{1}{((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta)^{1-\alpha}})((\frac{t}{n})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})<0。$$

所以, 当取 $t=n$ 时, y 取到最小值 $\delta_1'=1-(1-\delta)^\alpha$, 显然 $\delta_1'\le\delta'$, 故有 $\frac{k}{n}-\delta_1'\ge\frac{k}{n}-\delta'\ge x^\alpha$, 即有 $\frac{k}{n}-\delta_1'\ge x^\alpha$。

(ii) 若 $\frac{k}{n}^{\frac{1}{\alpha}}-x\le-\delta$ 成立, 则有 $\frac{k}{n}^{\frac{1}{\alpha}}+\delta\le x$, 即 $(\frac{k}{n}^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^\alpha\le x^\alpha$, 记此不等式的左端为 $\frac{k}{n}+\delta''$, 则有 $\frac{k}{n}+\delta''\le x^\alpha$, 其中 $\delta''=((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^\alpha-\frac{k}{n}$, 令 $y=((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^\alpha-\frac{t}{n}$, $t\in[0,n]$, 因为

$$y'=\alpha((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^{\alpha-1}\frac{1}{\alpha}\frac{t}{n}^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=$$

$$\frac{1}{n}(1-\frac{1}{((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-\delta)^{1-\alpha}})((\frac{t}{n})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})<0,$$

所以, 当取 $t=n$ 时, y 取到最小值 $\delta''_1=(1+\delta)^\alpha-1$, 显然 $\delta_1'\le\delta'$, 故有 $\frac{k}{n}-\delta_1'\le\frac{k}{n}-\delta'\le x^\alpha$, 即有 $\frac{k}{n}+\delta''_1\le x^\alpha$。

取 $\delta_1=\min\{\delta_1',\delta''_1\}$, 由(1)和(2)可得有 $|\frac{k}{n}-x^\alpha|\ge\delta_1$ 成立。

3) 再证 $\alpha>1$ 的情形。设 $|(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x|\ge\delta$, 即有 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x\ge\delta$ 或 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x|\le-\delta$ 成立。

(i) 若 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x\ge\delta$ 成立, 则有 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}\ge x+\delta$, 进而有 $(\frac{k}{n})\ge(x+\delta)^\alpha$, 下面分 $x\in[0,\frac{\delta}{2}]$ 和 $x\in[\frac{\delta}{2},1]$ 两种情形讨论: 若 $x\in[\frac{\delta}{2},1]$, 则 $\frac{k}{n}-x^\alpha\ge(x+\delta)^\alpha-x^\alpha\alpha\xi^{\alpha-1}\delta\ge\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\delta^\alpha$, 其中 $\frac{\delta}{2}\le x<\xi<x+\delta$, 若 $x\in[0,\frac{\delta}{2}]$, $\frac{k}{n}-x^\alpha=\frac{k}{n}-(\frac{\delta}{2})^\alpha+(\frac{\delta}{2})^\alpha-x^\alpha\ge((x+\delta)^\alpha-(\frac{\delta}{2})^\alpha)+((\frac{\delta}{2})^\alpha)-x^\alpha)\ge(x+\delta)^\alpha-(\frac{\delta}{2})^\alpha=\alpha\xi^{\alpha-1}(x+\frac{\delta}{2})\ge\frac{\alpha}{2^\alpha}\delta^\alpha$, 其中 $\frac{\delta}{2}\le\xi<x+\delta$, $x\ge0$。

所以, 取 $\delta_1'=\frac{\alpha}{2^\alpha}\delta^\alpha$, 则对任 $x\in[0,1]$, 有 $\frac{k}{n}-x^\alpha\ge\delta_1'$。

(ii) 若 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-x\le-\delta$ 成立, 则有 $(\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta\le$

x, 即$((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^{\alpha}\le x^{\alpha}$, 记此不等式的左端为$\frac{k}{n}+\delta''$, 则有$\frac{k}{n}+\delta''\le x^{\alpha}$, 其中$\delta''=((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^{\alpha}-\frac{k}{n}$, 令$y=((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^{\alpha}-\frac{t}{n}$, $t\in[0,n]$, 因为

$$y'=\alpha((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^{\alpha-1}\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\Big(((\frac{t}{n})^{\frac{1}{\alpha}}+\delta)^{\alpha-1}\frac{1}{(\frac{t}{n})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}-1\Big)>0,$$ 所以,

当取$t=0$时, y取到最小值$\delta''_1=\delta^{\alpha}$, 显然$\delta''_1\le\delta''$, 故有$\frac{k}{n}+\delta''_1\le\frac{k}{n}+\delta''\le x^{\alpha}$, 即有$\frac{k}{n}+\delta''_1\le x^{\alpha}$。

取$\delta_1=\min\{\delta'_1,\delta''_1\}$, 由(i) 和(ii) 可得有$\left|\frac{k}{n}-x^{\alpha}\right|\ge\delta_1$成立。

由1)～3) 可知引理1成立。

引理2 当$0\le x\le1$时, 对任α>0, 成立恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(k-mx^{\alpha})^2x^{k\alpha}(1-x^{\alpha})^{n-k}=nx^{\alpha}(1-x^{\alpha})。$$

证　明　当$0\le x\le1$时, 对任α>0, 有$0\le x^{\alpha}\le1$, 由恒等式[1]

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(k-mx)^2x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x),$$

用x^{α}替换x可得到所要恒等式。

下面再回到定理的证明。

由引理1, 令$B_1=\{k\left|\frac{k}{n}-x^{\alpha}\right|\ge\delta_1\}$, 若$k\in B$, 则必有$k\in B_1$, 所以有$B\subset B_1$. 而当$k\in B_1$时, 有$\left|\frac{k}{n}-x^{\alpha}\right|\ge\delta_1$, 故有$\frac{(k-nx^{\alpha})^2}{n^2\delta_1^2}\ge1$。再由于$f(x)$在$[0,1]$上连续, 所以存在$M>0$, 使得对任$x\in[0,1]$有$|f(x)|\le M$。然后, 结合引理2的恒等式, 对式(3) 右边第二项有

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in B}\left|f((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}})-f(x)\right|C_n^kx^{ka}(1-x^{\alpha})^{n-k}\le\\&2M\sum_{k\in B}C_n^kx^{ka}(1-x^{\alpha})^{n-k}\le\\&2M\sum_{k\in B_1}C_n^kx^{ka}(1-x^{\alpha})^{n-k}\le\\&\frac{2M}{n^2\delta_1^2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(k-nx^{\alpha})^2x^{ka}(1-x^{\alpha})^{n-k}=\\&\frac{2M}{n^2\delta_1^2}nx^{\alpha}(1-x^{\alpha})\le\frac{M}{2n\delta_1^2}。\end{aligned}$$

取$N=[\frac{M}{\epsilon\delta_1^2}]$, 当$n>N$, 时, 有

$$\sum_{k\in B}\left|f((\frac{k}{n})^{\frac{1}{\alpha}})-f(x)\right|C_n^kx^{ka}(1-x^{\alpha})^{n-k}<\frac{\epsilon}{2}$$

所以, 当$n>N$时, 有

$$|B_n(x,f,\alpha)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon。$$

即$B_n(x,f,\alpha)$在$[0,1]$上一致收敛于$f(x)$。

显然, 当α=1时, 定理即为韦尔斯特拉斯定理。

2　数值例子

例1　取$f(x)=\cos(x)$, $x\in[0,1]$, 分别取α=1, α=1/2, α=2, α=8, 取$n=50$, $n=70$, $n=90$, 用Matlab6.0求出相应的$B_n(x,f,\alpha)$与$f(x)$的误差(相应的n点的函数值之差的平方和的平方根), 比较如下表。

表1　误差比较1

Tab 1　Contrast of errors 1

n	α=0.5	α=1	α=2	α=8
50	0.027 7	0.011 2	0.000 9	0.314 9
70	0.023 4	0.009 5	0.000 8	0.336 0
90	0.020 7	0.008 3	0.000 7	0.352 7

由表1可以看出随着n的增大, 整体误差在减小, 这就是$B_n(x,f,\alpha)$一致收敛于$f(x)$的一定体现。另一方面由表1还可以看出整体误差的大小与α的取值有很大的关系, 也就反映出α取值不同$B_n(x,f,\alpha)$收敛于$f(x)$的快慢不同, 表1中α=2时, $B_n(x,f,\alpha)$收敛于$f(x)$的速度明显快得多。

例2　取$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$, $x\in[-1,1]$, 先用变量变换$t=\frac{1}{2}(x-1)$或$x=-1+2t$把函数变为$F(t)=\frac{1}{1+25(-1+2t)^2}$, $t\in[0,1]$, 分别取α=0.5, α=1, α=2, α=4, 取$n=100$, $n=120$, $n=140$, 用Matlab6.0求出相应的$B_n(x,F,\alpha)$, 然后用上述变量变换换回变量x得相应的$B_n(x,f,\alpha)$, 求出其与$f(x)$的误差(相应的n点的函数值之差的平方和的平方根) 比较如下表

表2　误差比较2

Tab 2　Contrast of errors 2

n	α=0.5	α=1	α=2	α=4
100	0.616 1	0.429 9	0.346 6	0.454 3
120	0.595 4	0.409 7	0.327 9	0.433 7
140	0.576 2	0.391 9	0.311 8	0.416 6

(下转第472页)

A_o) 有关, 与输入回路参数(R_s, r_i, F) 亦有关, 但与 R_L 无关。

参考文献:

[1] 童诗白. 模拟电子技术基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988. 325-328.

[2] 清华大学电子学教研组. 模拟电子技术基础简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985. 149-158.

[3] 张风言. 电子电路基础 第2版[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 258-269.

[4] 方天申. 负反馈使放大器输入、输出电阻的解析计算[J]. 大学物理, 2000, 19(3): 23-26.

[5] 李永安. 负反馈放大器输入、输出电阻的网络分析[J]. 海南大学学报(自然科学版), 2001, 19(3): 288-293.

[6] 张永端, 杨林耀, 刘振起. 网络、信号与系统[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1995. 22-23.

(编　辑　曹大刚)

A network analysis of a negative-feedback amplifier

LI Yong-an[1], HU Man-li[2], ZHOU Jing-hui[2], ZHOU Yin-sui[2]

(1. Department of Physics, Xianyang Teachers College, Xianyang 712000, China; 2. Department of Physics, Northwest University, Xi′an 710069, China)

Abstract: A negative-feedback amplifier is analysed by network method on the basis of a ideal block diagram. New obtained formula can overall describe the circuit parameter of influencing the input and output resistances and gain.

Key words: negative-feedback amplifier; gain; A parameter; network analysis

---

(上接第467页)

由表1可以看出, 随着 n 的增大, 整体误差在减小, 但与例1比较误差减小的慢一些。这当然与 $B_n(x, f, \alpha)$ 收敛于 $f(x)$ 的快慢有关。但是, 注意到例1的区间只是例2的区间一半, 说明例2的 n 还不够大, 但 n 太大时会得不到结果, 这是由于计算 $B_n(x, f, \alpha)$ 的系数时数值太大所致(上述算法中有计算 $n!$)。所以, 上述定理是用 α- 多项式进行函数逼近的理论基础, 而要实际计算时一方面要注意 α 的选取, 另一方面 n 不能太大或选取适当的算法尽量避免直接计算 $n!$。

参考文献:

[1] 李成章, 黄玉民. 数学分析[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[2] 王淑云, 孙　毅, 何甲兴. 关于一个Bernstein插值过程收敛阶的点态估计[J]. 吉林工业大学自然科学学报, 2001, 31(1): 43-46.

[3] 冯结青, 彭群生. Bernstein多项式的快速复合算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(2): 163-167.

(编　辑　曹大刚)

An approximation of a continuing function by a sequence of α-polynomial

HOU Zai-en[1,2], WANG Xiao-ying[1,3]

(1. Faculty of Science, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, China; 2. Department of Base, Shannxi University of Science and Technology, Xianyang 712081, China; 3. Department of Mathematics, Nothwest University, Xi′an 710069, China)

Abstract: The problem of approximation of a continuing function by a sequence of α-polynomial is proposed. Then, applying the generalized Bernstein polynomial, the approximation theorem is established, that is, there exists a sequence of α-polynomial $\{P_n(x, a)\}$ for a continue function $f(x)$ in a closed interval $[a, b]$, the sequence $\{P_n(x, a)\}$ converges the function $f(x)$ uniformly in the interval. Two numerical examples are given.

Key words: approximation of function; Bernstein polynomial; convergence uniform