2001 年 2 月
第 31 卷第 1 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Feb. 2001
Vol. 31 No. 1

一类代数数的连分数表示的一个算法

袁　进

(西北大学 数学系,陕西 西安　710069)

摘要:给出了计算一类实代数数的最小多项式的算法,在此基础上,可以计算这一类型实代数数的连分数表示,这一工作改进和推广了 S. Lang 和 H. Trotter 的关于代数数连分数的算法。

关　键　词:代数数;连分数;最小多项式

中图分类号:O156.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-274X(2001)01-0001-04

对于一些代数数,例如 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$,以及 $\alpha_1 = 2\cos(2\pi/7)$($x^3 + x^2 - 2x - 1$ 的一个根),α_2($x^5 - x - 1$ 的一个根),文献[1]给出了一个求它们的连分数的算法。用这种算法,可以处理一类具有惟一大于 1 的正简单无理根的整系数多项式。但如果一个多项式有两个十分相近但不同的正根,文献[1]的方法就无法解决我们所期望解决的问题。对于任意给定的系数为有理数的多项式,如何求出它的所有实根的连分数表示?进一步,对于任意给定的实代数数,如何算出它的连分数表示?其实对于任意给定的实代数数,要确定它的最小多项式也不是容易的。但是,起码可以考虑一类形如

$$\alpha = \sum_i C_i \prod_j m_{ij}^{K_{ij}/d_{ij}} \tag{1}$$

的实代数数,这里 C_i 是整数,m_{ij}, d_{ij}, K_{ij} 是正整数,其中 $d_{ij} \geqslant 2, K_{ij} < d_{ij}$ 以及对于每个 i, j, m_{ij} 不是整数的 d_{ij} 次幂。例如

$$\alpha = 19 + 3(\sqrt[5]{2})^3 \sqrt[6]{3} + 11\sqrt[4]{67}。$$

在本文中,将给出一个求这一类代数数的连分数表示的算法。

1　基本定义

令 α 是一个实数,$[a_0; a_1, a_2 \cdots]$ 是 α 的简单连分数。记

$$\frac{P_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

是 α 的第 n 个渐近分数,则 P_n 和 q_n 由下列递推分式给出

$$\begin{cases} P_{-2} = 0, P_{-1} = 1, P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, & n \geqslant 0, \\ q_{-2} = 0, q_{-1} = 1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & n \geqslant 0。\end{cases}$$

引理 1　设 α, β 是无理数,$\alpha = [a_0; a_1, a_{\cdots}, a_{n-1}, a_n \cdots]$ 和 $\beta = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, b_n \cdots]$,这里 $a_n \neq b_n$,则当 n 为偶数时,我们有 $\alpha > \beta$ 当且仅当 $a_n > b_n$;当 n 为奇数时,我们有 $\alpha > \beta$ 当且仅当 $a_n < b_n$。

证　明　记 $\alpha = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1}]$, $\beta = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, b_n, \beta_{n+1}]$,这里 α_{n+1} 与 β_{n+1} 分别为 α 和 β 的第 $n+1$ 个完全商。

从 $a_n > b_n$ 当且仅当

$$a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} > a_n \geqslant b_n + 1 > b_n + \frac{1}{\beta_{n+1}}$$

这一事实,可立即得到引理 1。

引理 2　设 α 是一个实数,a, b 是整数,且 $b \neq 0$, $(a, b) = 1$,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

则存在一个 $n \geqslant 1$,使 $a/b = P_n/q_n$。

证明参见文献[2] 定理 184。

2　最小多项式

下来,对于一个给定的形为式(1) 的实代数数,我们需要确定它的最小多项式。

不失一般性,我们可以假定

收稿日期:1999-04-07

基金项目:陕西省自然科学基金资助课题(HC972174)

作者简介:袁进(1955-),女,陕西米脂人,西北大学副教授,从事数论及代数学研究。

$$\alpha = C_0 + C_1 b_1^{1/d_1} + \cdots + C_n b_n^{1/d_n},$$

这里 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 是整数，$d_1, \cdots, d_n$ 是正整数且满足

$$2 \leqslant d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n, \tag{2}$$

以及对每个 i，b_i 是一个正整数，但 b_i 不是整数的 d_i 次幂。令 $x=\alpha$，则有

$$(x - C_0 - C_1 b_1^{1/d_1} - \cdots\cdots - C_{n-1} b_{n-1}^{1/d_{n-1}})^{d_n} - C_n^{d_n} b^n = 0。\tag{3}$$

由式(2)和式(3)可得

$$G_{n-1} = g_0 + g_1 b_{n-1}^{1/d_{n-1}} + \cdots + g_{d_{n-1}-1} b_{n-1}^{(d_{n-1}-1)/d_{n-1}} = 0。$$

这里 G_{n-1} 是一个系数，在 $Z[x, b_1^{1/d_1}, \cdots, b_{n-2}^{(d_{n-2}-1)/d_{n-2}}]$ 中，关于 $b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 的 $d_{n-1}-1$ 次多项式，从而

$$g_{d_{n-1}-1} b_{n-1}^{(d_{n-1}-1)/d_{n-1}} = -g_0 - g_1 b_{n-1}^{1/d_{n-1}} - \cdots - g_{d_{n-1}-2} b_{n-1}^{(d_{n-1}-2)/d_{n-1}}, \tag{4}$$

用 $g_{d_{n-1}-1} b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 乘式(4)的两边，我们得到

$$G'_{n-1} = 0。\tag{5}$$

这里 G'_{n-1} 也是一个系数，在 $Z[x, b_1^{1/d_1}, \cdots, b_{n-2}^{(d_{n-2}-1)/d_{n-2}}]$ 中，关于 $b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 的 $d_{n-1}-1$ 次多项式，在式(5)中，用

$$-g_0 - g_1 b_{n-1}^{1/d_{n-1}} - \cdots - g_{d_{n-1}-2} b_{n-1}^{(d_{n-1}-2)/d_{n-1}}$$

代替 $g_{d_{n-1}-1} b_{n-1}^{(d_{n-1}-1)/d_{n-1}}$，则得到

$$G_{n-2} = 0, \tag{6}$$

这里 G_{n-2} 是一个系数，在 $Z[x, b_1^{1/d_1}, \cdots, b_{n-2}^{(d_{n-2}-1)/d_{n-2}}]$ 中，关于 $b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 的 $d_{n-1}-2$ 次多项式，相似地，我们有

$$h_{d_{n-1}-2} b_{n-1}^{(d_{n-1}-2)/d_{n-1}} = -h_0 - h_1 b_{n-1}^{1/d_{n-1}} - \cdots - h_{d_{n-1}-3} b_{n-1}^{(d_{n-1}-3)/d_{n-1}}, \tag{7}$$

这里 $h_i (i = 0, \cdots, d_{n-1}-2)$ 是关于 $x, b_1^{1/d_{n-1}}, \cdots, b_{n-2}^{(d_{n-2}-1)/d_{n-2}}$ 的多项式。用 $g_{d_{n-1}-1} h_{d_{n-1}-2} b_{n-1}^{2/d_{n-1}}$ 乘式(7)的两边，得到

$$H_{n-2} = 0, \tag{8}$$

这里 H_{n-2} 仍然是一个系数，在 $Z[x, b_1^{1/d_1}, \cdots, b_{n-2}^{(d_{n-2}-1)/d_{n-2}}]$ 中关于 $b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 的 $d_{n-1}-1$ 次多项式，则能使用式(4，7)消去式(8)中包含 $b_{n-1}^{(d_{n-1}-1)/d_{n-1}}$ 和 $b_{n-1}^{(d_{n-1}-2)/d_{n-1}}$ 的那些项，从而得到 $H_{n-3} = 0$，这里 H_{n-3} 是系数在 $Z[x, b_1^{1/d_1}, \cdots, b_{n-2}^{(d_{n-2}-1)/d_{n-2}}]$ 中，关于 $b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 的 $d_{n-1}-3$ 多项式。

继续这一过程，得到 $L = 0$，这里 L 是一个关于 $b_{n-1}^{1/d_{n-1}}$ 的次数为 0，关于 $b_{n-2}^{1/d_{n-2}}$ 的次数为 $d_{n-2}-1$ 多项式。重复这一过程，最终我们可以得到一个整系数多项式 $P(x)$，对 $P(x)$ 进行因式分解就可得到代数数 α 的最小多项式 $p(x)$。

作为一个例子，如果给出代数数 $\alpha = 3 + 7\sqrt[5]{2} - \sqrt[6]{3}$，用上面的算法，则可得到 α 的最小多项式为

$$\begin{aligned}
p(x) = {} & x^{30} - 90x^{29} + 3\,915x^{28} - 109\,620x^{27} + 2\,219\,805x^{26} - 34\,830\,642x^{25} + \\
& 447\,988\,260x^{24} - 4\,996\,840\,320x^{23} + 50\,925\,580\,065x^{22} - 488\,262\,324\,330x^{21} + \\
& 4\,394\,923\,128\,645x^{20} - 36\,732\,536\,653\,680x^{19} + 286\,982\,158\,635\,675x^{18} - \\
& 2\,143\,983\,448\,788\,930x^{17} + 15\,460\,177\,041\,510\,120x^{16} - \\
& 105\,805\,430\,387\,368\,720x^{15} + 678\,916\,261\,621\,044\,315x^{14} - \\
& 4\,165\,443\,791\,826\,627\,870x^{13} + 25\,037\,976\,264\,403\,026\,375x^{12} - \\
& 144\,191\,228\,299\,773\,075\,180x^{11} + 766\,082\,183\,730\,991\,151\,055x^{10} - \\
& 3\,857\,185\,858\,071\,897\,656\,670x^{9} + 19\,573\,991\,496\,726\,418\,557\,270x^{8} - \\
& 96\,291\,409\,982\,991\,587\,269\,020x^{7} + 404\,871\,898\,268\,127\,519\,716\,220x^{6} - \\
& 1\,574\,914\,620\,028\,878\,895\,079\,892x^{5} + 6\,999\,033\,187\,135\,061\,901\,437\,040x^{4} - \\
& 28\,398\,492\,625\,287\,104\,682\,106\,320x^{3} + 75\,227\,761\,454\,642\,757\,390\,682\,980x^{2} - \\
& 107\,886\,475\,300\,005\,912\,399\,012\,360x + 1\,506\,046\,844\,984\,111\,372\,500\,025\,716。
\end{aligned}$$

使用简化基算法[3]，对一个代数数也可以求出它的最小多项式。

3 实根的连分数

在这一节中，我们将讨论整系数多项式的实根以及它们的连分数表示

$$f(x) = C_0 x^d + C_1 x^{d-1} + \cdots + C_d$$

是一个 $Z[x]$ 中次数为 $d \geqslant 2$ 的多项式，这里 $C_0 > 0$，$C_d \neq 0$，且 $f(x)$ 在 $Q(x)$ 中不可约，则 $f(x)$ 在 C 中有 $d(=r+2s)$ 个根。设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 $f(x)$ 的 r 个实根，$\beta_1, \bar{\beta}_1, \cdots, \beta_S, \bar{\beta}_S$ 是 $f(x)$ 的 S 对复共轭根，记

$$\mathrm{Sig}\,n(f(x)) = \mathrm{Sig}\,n(C_0)。$$

3.1 简单情况

假定多项式 $f(x)$ 满足下列条件

$$a_1 > 1, a_i < 0, \quad i \neq 1。$$

我们能使用文献[1]中的方法算出 α 的连分数如下

$$\begin{cases} P_0(x):=f(x), \\ a_0:=\max\{a;a\in Z,a>0,P_0(a)<0\}, \\ Q_{n-1}(x):=P_{n-1}(x+a_{n-1}), \\ p_n(x):=x^dQ_{n-1}(x^{-1}), \qquad (n\geqslant 1) \\ P_n(x):=p_n(x)\mathrm{sign}(p_n(x)), \\ a_n:=\max\{a;a\in Z,a>0,P_n(a)<0\}。\end{cases} \tag{9}$$

显然，$Q_{n-1}(x)$在0与1间正好有一个根，于是$P_n(x)$有惟一的正简单无理根$y_n>1$，且$P_n(x)$是一个首项系数为正整数的整系数多项式，从而我们有$\alpha_1=y_0$。且对$n\geqslant 1$

$$a_{n-1}=[y_{n-1}],$$
$$y_n=(y_{n-1}-a_{n-1})^{-1}。$$

即$a_0,a_1,a_2,\cdots$是α_1的连分数的部分商序列。文献[2]中给出的所有例子都属于这种特殊情况。

现在考虑多项式

$$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,$$

它有4个实根

$$\alpha_1=1.827\ 090\ 915\ 2\cdots,$$
$$\alpha_2=1.338\ 261\ 212\ 7\cdots,$$
$$\alpha_3=-0.209\ 056\ 926\ 5\cdots,$$
$$\alpha_4=-1.956\ 295\ 201\ 4\cdots。$$

由于这里有两个大于1的正根，我们不能用式(9)求连分数。从现在起，我们将考虑一般情况。

3.2 一般情况

一般地，我们解一个给定的代数方程$f(x)=0$，找出它的所有实根后，同时处理它们。设$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_r$是$f(x)$的所有实根。记$P_0(x)=f(x)$，对$k=1,\cdots,r$取

$$a_0^{(k)}:=[\alpha_k],$$
$$Q_0^{(k)}(x):=P_0(x+a_0^{(k)}),$$
$$p_1^{(k)}(x):=x^dQ_0^{(k)}(x^{-1}),$$
$$P_1^{(k)}(x):=p_1^{(k)}(x)\mathrm{sig}\ n(p_1^{(k)}(x))。$$

于是我们有$a_0^{(1)}\geqslant a_0^{(2)}\geqslant\cdots\geqslant a_0^{(r)}$. 如果$a_0^{(1)}>a_0^{(2)}>\cdots>a_0^{(r)}$，则对于每个$k,1\leqslant k\leqslant r$，$Q_0^{(k)}(x)$在0与1间正好有一个根，从而$P_1^{(k)}(x)$是首项系数为正，且只有惟一大于1的简单正无理根的整系数多项式。在此情况下，我们可以使用式(9)，分别算出所有根的连分数。如果$a_0^{(1)}>a_0^{(2)}>\cdots>a_0^{(r)}$不成立，则我们将同时得到几个相等的$Q_0^{(k)}(x)$和$P_1^{(k)}(x)$，在这种情况下，我们就不能利用算法(9)得到这些根的正确连分数表示。

现在，我们划分集合$\{a_0^{(1)},a_0^{(2)},\cdots,a_0^{(r)}\}$为一些不同的子集，每个子集中所含元素有相同的整数值。假定存在整数$k\geqslant 1$和整数$t\geqslant 1$，使集合

$$\{a_0^{(k+1)},a_0^{(k+2)},\cdots,a_0^{(k+t)}\}=\{a_0,a_0,\cdots,a_0\}。\tag{10}$$

例如，多项式

$$f(x)=x^6-x^5-6x^4+6x^3+8x^2-8x+1$$

有6个实根

$$\alpha_1=1.911\ 145\ 611\ 5\cdots,$$
$$\alpha_2=1.652\ 477\ 548\ 6\cdots,$$
$$\alpha_3=0.730\ 682\ 048\ 7\cdots,$$
$$\alpha_4=0.149\ 460\ 187\ 1\cdots,$$
$$\alpha_5=-1.466\ 103\ 743\ 6\cdots,$$
$$\alpha_6=-1.977\ 661\ 652\ 4\cdots。$$

α_1与α_2的前两个连分数部分商分别为

$$\alpha_1=[1;1,\cdots],\qquad \alpha_2=[1;1\cdots],$$

我们在集合(10)中选择一个元素并取

$$Q_0(x):=P_0(x+a_0),$$
$$p_1(x):=x^dQ_0(x^{-1}),$$
$$P_1(x):=p_1(x)\mathrm{sig}\ n(p_1(x))。$$

求解代数方程$P_1(x)=0$，我们可求出t个大于1的根，记作$r_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant r_{k+t}$. 对于$j=k+1,\cdots,k+t$，记$a_1^{(j)}=[r_j]$。显然由引理1，我们得到对应

$$\alpha_{k+1}\longleftrightarrow[a_0;a_1^{(k+1)},\cdots],$$
$$\alpha_{k+2}\longleftrightarrow[a_0;a_1^{(k+2)},\cdots],$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_{k+t}\longleftrightarrow[a_0;a_1^{(k+t)},\cdots]。$$

于是，我们有$a_1^{(k+1)}\leqslant a_1^{(k+2)}\leqslant\cdots\leqslant a_1^{(k+t)}$，则集

$$\{a_1^{(k+1)},a_1^{(k+2)},\cdots,a_1^{(k+t)}\}$$

又能被分成一些不同的子集，每个子集中的元素有相同的整数值。如果$f(x)$仅有单根，我们对所有子集同时重复这一过程，一直到我们得到r个子集为止，即每个子集中仅含有一个整元素，从而我们能同上面一样使用式(9)获得多项式$f(x)$的所有实根的连分数。为了进行这一步骤，我们必须保证每个$Q_n(x)$和$P_n(x)$有整系数，如果$f(x)$最起码有一个重根，则我们不能终止以上过程，因此，也就不能使用式(9)。

注意：如果我们将$P_1(x)=0$的大于1的实根以从小到大进行排序，据引理1，则在下一步，我们必须将$P_2(x)=0$的大于1的实根以从大到小的次序排列。代替每个$P_n(x)=0$的实根的排序，我们可以取每个根的整数部分和计算它们的渐近分数，从而用引理2给出一个正确的对应。

4　代数数的算法

最后，我们使用在第 2 节和第 3 节中所叙述的算法，对于形如式(1) 的实代数数，给出它们的连分数表示。例如

$$\alpha = 3 + 7\sqrt[5]{2} - \sqrt[6]{3},$$

α 的前 500 位部分商为

[9;1,5,4,32,1,3,2,1,7,3,1,12,1,1,4,1,5,3,1,1,1,31,2,5,1,1,3,2,2,17,1,3,69,1,2,14,1,2,2,1,14,1,39,1,4,1,1,4,1,16,2,24,1,2,1,5,10,1,6,2,13,7,2,3,7,3,5,7,1,5,1,1,1,2,63,1,2,2,1,8,1,2,2,1,1,4,1,1,2,4,3,1,3,2,1,1,1,1,3,4,1,1,3,2,3,4,1,13,2,1,1,30,79,1,1,1,2,79,3,2,1,8,2,1,1,4,22,1,4,4,1,1,2,1,10,4,1,4,6,2,7,1,4,1,73,1,11,2,1,7,1,1,4,3,2,5,116,3,30,1,1,4,1,21,2,2,1,1,2,1,1,2,5,1,19,1,1,2,3,19,2,3,1,1,3,1,8,141,27,1,3,17,1,1,36,1,6,1,36,1,2,1,1,8,2,1,16,4,1,6,1,2,3,7,1,4,1,1,3,2,1,60,2,2,2,1,2,1,1,8,2,1,1,1,1,18,1,2,3,2,1,4,3,28,1,65,4,77,1,5,8,80,1,2,1,2,1,2,2,1,1,3,21,1,1,2,13,5,10,2,3,2,1,17,2,2,1,27,5,1,129,3,1,1,6,4,8,10,5,2,1,27,1,2,4,1,1,6,2,2,2,1,2,1,3,25,6,2,9,1,3,20,1,22,179,11,1,2,8,2,8,1,1,2,3,5,1,24,1,1,796,1,1,3,1,4,2,1,4,1,5,7,3,1,1,1,4,4,7,2,9,1,1,1,1,1,1,10,2,20,1,2,1,1,3,2,1,3,2,7,8,1,13,1,2,4,1,14,1,15,1,1,3,1,5,1,299,86,1,1,1,89,1,1,1,1,2,29,1,1,2,36,1,1,15,1,3,2,3,1,6,1,23,1,1,51,1,1,40,1,4,1,7,3,5,2,1,1,14,4,2,2,4,1,1,3,1,1,1,1,1,1,2,3,24,1,22,1,4,1,5,1,1,2,2,2,1,14,11,8,49,3,2,1,4,10,1,4,1,12,2,2,3,8,81,2,4,6,2,1,1,2,1,4,3,1,1,42,1,4,1,34,2,1,27,6,2,4,2]。

参考文献:

[1] LANG S, TROTTER H. Contiuned fractions for some algebraic numbers[J]. J Reine Angew Math, 1972, 255: 112-134.

[2] HARDY G H, WRIGHT E M. An Introdution to the Theory of Nurnbers[M]. London: Oxford University Press, 1960.

[3] LENSTRA A K, LENSTRA H W, LOVASE L. Factoring polvnomials with rational coefficients[J]. Math Ann, 1982, 261: 515-538.

(编辑　曹大刚)

An algorithm for continued fractions of algebraic number

YUAN Jin

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstroact: An algorithm for computing the minimal polynomial to a class of real algebraic numbers is presented. Furthmore, the continued fraction expansions to the class of real algebraie number can be computed.

Key words: algebraic number; continued fractions; minimal polynomial