

⑥
18-21

模糊控制系统的稳定区域及其确定方法[†]

李承家 戴冠中

TP273

(西北工业大学应用数学系,西安,710072)

摘要 基于稳定度的新的定义形式,讨论了模糊系统的稳定性,给出了系统的稳定性条件。接着提出了模糊控制系统稳定区域的概念,并给出稳定区域的确定方法。最后通过小球的自由运动实例,说明了该方法的有效性。

关键词 模糊控制;模糊推理;稳定性区域

模糊控制系统

分类号 V249.1 **文献标识码** A **论文编号** 1000-274X(1999)01-0018-21

自从 Mamdani 和 Assilian 利用模糊集理论为一简单动力学过程构造模糊控制器^[1]以来,模糊控制在实际问题中的应用越来越引起人们的兴趣。实践表明,对于高度非线性系统或不易用传统方法控制的不确定性系统,模糊控制尤显有效。这主要因为模糊控制器采用 if-then 结构的控制规则,因而容易利用人类的控制经验和知识。但是,模糊集理论,尚未提供有效工具用于分析模糊控制系统的性能。模糊控制理论的发展远未完善,系统的稳定性、鲁棒性都没有很好地解决。目前,稳定性的研究主要集中于两方面:① Mamdani 型模糊控制器。这方面的研究大多基于关系矩阵的方法,参见文献[2~5]。② Takagi-Sugeno 型模糊控制器,有关 T-S 模糊控制器有大量的研究成果,参见文献[6,7]。本文提出一种分析模糊系统稳定性的方法,为设计稳定的模糊控制器提供指导。首先,基于一种不同于 Tong^[3]的稳定度的定义方式,研究了系统的稳定性,并给出模糊系统稳定的充分条件;进而,研究模糊控制系统的稳定区域,提出了确定稳定区域的算法;最后,通过小球的自由运动说明该方法的有效性。

$X_k \in F(X), U_k \in F(U)$ 。系统用下面模糊动态方程表示

$$X_{k+1} = (X_k, U_k) \circ R, \quad (1)$$

这里 k 代表整数时间指标, X_k 代表过程在 k 时刻状态的模糊集, X_{k+1} 表示过程的下一状态。 (X_k, U_k) 表示定义在 Cartesian 积 $X \times U$ 上的模糊集。其隶属度由 X_k, U_k 隶属度取小获得。即 $(X_k, U_k)(x, u) = X_k(x) \wedge U_k(u)$, $X_k(x), U_k(u)$ 分别代表各自隶属度, \wedge 表示取小运算, \vee 表示取大运算。 R 表示定义在 $X \times U \times X$ 上的三元关系,合成关系采用取大取小算子,记作 \circ 。

于是 $X_{k+1}(x) = \bigvee_{(\bar{x}, \bar{u})} [(X_k, U_k)(\bar{x}, \bar{u}) \wedge R(\bar{x}, \bar{u}, x)]$, 易知

$$X_{k+1} = (X_k, U_k) \circ R = X_k \circ (U_k \circ R) \quad (2)$$

模糊状态方程(2)在零输入下称为自由模糊开环系统或非强制模糊开环系统。

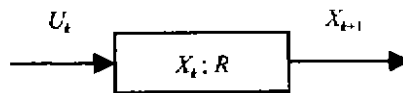


图1 模糊开环系统

Fig.1 Fuzzy Open-loop System

本文研究模糊控制系统:

$$X_{k+1} = X_k \circ R \quad (3)$$

定义1^[6] 设模糊集 $A, B \in F(X)$, 称 $A \circ B = \bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge B(x))$ 为 A, B 的内积; 称 $A \cdot B = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \vee B(x))$ 为 A, B 的外积。

1 稳定性分析与稳定区域

本文研究模糊开环系统^[3], 见图1。假设控制输入 U_k 是定义在有限离散论域 U 上的模糊集, X_k 是定义在有限离散论域 X 上的模糊集, 分别记作

[†] 收稿日期:1997-12-12

基金来源:国家教委博士点基金资助项目(9400016)

作者简介:李承家(1967-),讲师

定义 2 设模糊集 $A, B \in F(X)$, A, B 的贴近度定义为

$$M = A \circ B / \bigvee_{x \in X} B(x) = A \circ B / \bigvee_{x \in X} A(x) = \bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge B(x)) / \bigvee_{x \in X} A(x).$$

本文中所有模糊集均为正规模糊集, 即

$$\bigvee_{x \in X} A(x) = 1, \text{ 于是 } M = A \circ B.$$

定义 3 对于模糊控制系统 (3), 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1} \circ X_k$ 存在, 对初始模糊状态 X_0 , 则称系统关于 X_0 稳定。令 $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1} \circ X_k$, 称作系统的稳定度。

可以看出, 稳定度是模糊系统的基本属性, 与状态方程相邻两状态的贴近程度有关。

定义 4 对于模糊控制系统 (3), 稳定度不小于 α 的所有初始点构成系统的 α -稳定区域, 记作 S_α , 即 $S_\alpha = \{X_0 \in F(X) \mid \lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1} \circ X_k \geq \alpha, \text{ 对 } X_0\}$, 当 S_α 涵盖了所有可能的模糊集时, 称系统全局 α -稳定, 当 S_1 涵盖了所有可能的模糊集时, 称系统全局绝对稳定。

对于上述定义, 可以得到模糊系统稳定的充分条件。

定理 1^[6] 对模糊控制系统 $X_{k+1} = X_k \circ R, X_0$ 为初始状态,

(1) 若 $X_{k+1} \circ X_k \geq X_k \circ X_{k-1}$ 对任意 k 成立, 则系统关于初始点 X_0 稳定;

(2) 若存在 $N, X_{N+1} \geq X_N$, 则系统关于初始点 X_0 稳定;

(3) 若存在 N , 满足 $X_{N+1} \circ X_N = 1, X_N$ 是凸正规模糊集, 则系统关于初始点 X_0 绝对稳定。

定理 2 设 X_k 是正规模糊集, X_0 是系统平衡状态, X_0 是凸模糊集, 则下面结论成立: 若 $R^n \circ X_0 = [1, 1, \dots, 1]^T, n > N$, 那么 $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1} \circ X_k = 1$, 即模糊系统绝对稳定。

由定理 2 可知, 若系统在 Tong 的定义下稳定^[4], 则按本文定义 3 也稳定。

2 稳定区域的确定

本节提出了一种确定稳定区域的方法。这里, 我们仅确定绝对稳定区域 S_1 , 推至一般的 S_α 并不困难。

通常在模糊控制器设计中, 均要求模糊状态为凸正规模糊集。对模糊状态 X_0 , 将核 $\ker X_0$ 模糊化作为状态的代表, 记作 X_0^* 。可以发现 X_0^* 作为初始

状态, 系统稳定性态与原状态 X_0 密切相关。因 $X_0 \geq X_0^*, X_0 \circ R \geq X_0^* \circ R$, 即 $X_1 \geq X_1^*$, 依次类推, $X_k \geq X_k^*, X_{k+1} \circ X_k \geq X_{k+1}^* \circ X_k^* \geq X_{k+1}^* \circ X_k^*$, 若对初始代表状态 X_0^* 系统稳定, 则初始点 X_0 一定属于稳定区域 S_1 。

确定 S_1 算法如下:

(1) 取 $X_0^* = [1, 0, 0, \dots, 0]$, 若由 (3) 式获得的 X_1, X_2, \dots, X_n 满足绝对稳定条件, 即稳定度为 1, 则可知与 X_0^* 核相同的模糊初始状态均属于 S_1 。

(2) 取 $X_0^* = [0, 1, 0, \dots, 0]$, 若由 (3) 式获得的 X_1, X_2, \dots, X_n 使系统绝对稳定, 则与 X_0^* 核相同的模糊初始状态也属于稳定区域 S_1 。

(3) 类似, 检验所有可能的代表模糊集, 将可获得模糊控制系统的稳定区域。

3 实例分析

下面通过小球自由运动实例的分析, 来说明上述稳定性分析和稳定区域确定方法的有效性。

例: 小球的自由运动, 见图 2。

模糊状态隶属度函数如下所示:

R_1 : if X_k is S_1 then X_{k+1} is S_2 ,

R_2 : if X_k is S_2 then X_{k+1} is S_3 ,

R_3 : if X_k is S_3 then X_{k+1} is S_4 ,

R_4 : if X_k is S_4 then X_{k+1} is S_5 ,

R_5 : if X_k is S_5 then X_{k+1} is S_6 ,

R_6 : if X_k is S_6 then X_{k+1} is S_7 。

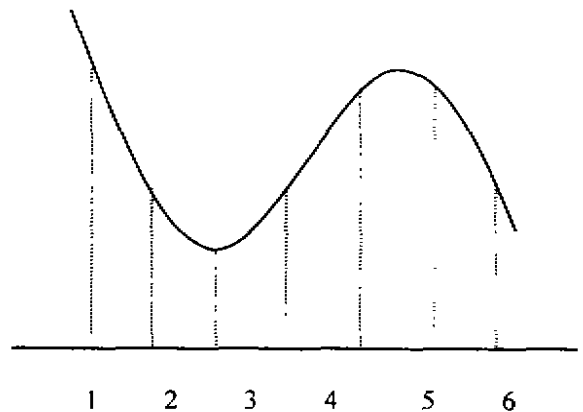


图 2 小球自由运动

Fig. 2 Free Movement of Small Ball

模糊控制规则的获取同实际情况相符。按 Mamdani 极小极大合成法, 求得模糊关系矩阵 R 为

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \\ 0.1 & 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.7 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

小球运动由模糊系统描述,系统最大平衡点为 $X_0 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7]$ 。

表 1 模糊集隶属度

Tab. 1 Membership Function of Fuzzy Set

	1	2	3	4	5	6	7
S_1	1	0.7	0.2	0	0	0	0
S_2	0.7	1	0.7	0.1	0	0	0
S_3	0.1	0.7	1	0.7	0.1	0	0
S_4	0	0.1	0.7	1	0.7	0.1	0
S_5	0	0	0.2	0.7	1	0.6	0
S_6	0	0	0	0.1	0.5	1	0.7
S_7	0	0	0	0	0.1	0.7	0.2

下面确定稳定区域

$$(1) X_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$X_1 = [0.7 \ 1.0 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.1 \ 0 \ 0],$$

$$X_2 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.1 \ 0.1],$$

$$X_3 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.5],$$

$$X_4 = X_3, \dots, \alpha = 1;$$

$$(2) X_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$X_1 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.1 \ 0 \ 0],$$

$$X_2 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.1 \ 0],$$

$$X_3 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.5],$$

$$X_4 = X_3, \dots, \alpha = 1;$$

$$(3) X_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$X_1 = [0.2 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.2 \ 0.1 \ 0],$$

$$X_2 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.2 \ 0.2],$$

$$X_3 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.5],$$

$$X_4 = X_3, \dots, \alpha = 1;$$

$$(4) X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$X_1 = [0.1 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.1 \ 0.1],$$

$$X_2 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.5],$$

$$X_3 = X_2, \dots, \alpha = 1;$$

$$(5) X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

$$X_1 = [0.1 \ 0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.5],$$

$$X_2 = [0.7 \ 0.7 \ 1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.5],$$

$$X_3 = X_2, \dots, \alpha = 1;$$

$$(6) X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0],$$

$$X_1 = [0.1 \ 0.1 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.7 \ 1],$$

$$X_2 = [0.2 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7],$$

$$X_3 = [0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7],$$

$$X_4 = X_3, \dots, \alpha = 0.7;$$

$$(7) X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

$$X_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.7 \ 0.7],$$

$$X_2 = [0.1 \ 0.1 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7],$$

$$X_3 = [0.2 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7],$$

$$X_4 = [0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7],$$

$$X_5 = X_4, \dots, \alpha = 0.7.$$

由此可知,系统全局稳定,稳定度为 0.7。绝对稳定区域为状态 1,2,3,4,5 附近的模糊状态,这与实际情形相符。当初始状态为 6,7 位置,小球将不再趋于平衡位置。

4 结 论

本文基于模糊开环系统(3)前后两状态的贴近度,给出模糊系统稳定度的新的定义形式,对系统的稳定性态作了分析,并给出系统稳定的充分条件。基于这种稳定性定义,研究了模糊系统的稳定区域,并给出其确定方法,实例表明该方法简捷有效。本文提出的稳定性分析方法,对于 Mamdani 型模糊系统的稳定性设计将有较好的指导作用。

参 考 文 献

- 1 Mamdani E H, Assilian S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Int. J. Man Mach. Studies*, 1975, 7(1): 1~13
- 2 Tong R M. Some properties of fuzzy feedback systems. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 1980, SMC-10(6): 327~330
- 3 Tong R M. Analysis and control of fuzzy systems using finite discrete relations. *Int. J. Control*, 1978, 27(3): 431~440
- 4 Chen J Q, Chen L J. Study on fuzzy closed-loop control systems. *Fuzzy sets and systems*, 1993, 57(2): 159~168
- 5 李承家,戴冠中. 非强制控制系统的稳定性分析. 见:施 阳,郑会永,李 俊,等主编. 现代科技理论与应用. 西安:西北工业大学出版社,1996. 151~155
- 6 Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45: 135~156

- 7 Wang H, Tanaka K, Griffin M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems; stability and design issues. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1996, 4(1): 14~23
- 8 罗承忠. 模糊集引论(上). 北京:北京师范大学出版社, 1989

(编 辑 曹大刚)

Stability Region of Fuzzy Control Systems and Its Determination

LI Chengjia DAI Guanzhong

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

Abstract Based on a new definition of stable degree, stability property of fuzzy systems is analyzed and the sufficient conditions are established. Then the concept of stability region of fuzzy control systems and its determination is presented. Finally, the result is illustrated by the example of a small ball's free movement.

Keywords fuzzy control; fuzzy reasoning; stability region

· 学术动态 ·

我校 1997 年度 SCI 载文数进入全国高校前 50 名, 位居第 36 位

中国科技信息研究所据 1997 年 SCI 统计, 1997 年度我国高等院校科技论文数前 50 名高校顺序排定, 我校位居全国高校第 36 位。详见下表:

表 1 1997 年度全国高等院校科技论文数前 50 名排序

名次	高校名称	论文数	名次	高校名称	论文数
1	南京大学	682	27	北京科技大学	57
2	北京大学	448	28	湖南大学	54
3	清华大学	407	29	北京理工大学	46
4	中国科技大学	375	30	北京航空航天大学	44
5	复旦大学	320	31	湖南医科大学	43
6	浙江大学	220	32	东北大学	42
7	南开大学	196	32	上海大学	42
8	吉林大学	192	34	同济大学	41
9	山东大学	191	35	华南理工大学	40
10	兰州大学	163	36	河南师范大学	37
11	东南大学	128	36	西北大学	37
12	中山大学	110	36	西北工业大学	37
13	北京师范大学	105	39	南京师范大学	33
13	四川联合大学	105	40	湖南师范大学	32
15	厦门大学	103	41	华中师范大学	31
16	西安交通大学	92	42	电子科技大学	30
17	杭州大学	89	42	苏州大学	30
18	天津大学	83	44	西北师范大学	29
19	北京医科大学	82	45	东北师范大学	28
19	武汉大学	82	45	河北大学	28
21	哈尔滨工业大学	67	45	华东师范大学	28
21	华东理工大学	67	48	第二军医大学	25
21	华中理工大学	67	48	西南交通大学	25
24	大连理工大学	65	50	青岛海洋大学	23
25	上海交通大学	62	50	西安电子科技大学	23
26	上海医科大学	58	50	中国农业大学	23

(姚 远)