2001 年 2 月 西北大学学报(自然科学版) Feb. 2001
第 31 卷第 1 期 Journal of Northwest University(Natural Science Edition) Vol. 31 No. 1

一类非线性椭圆型方程的衰退正整体解

张全举[1],冯芙叶[2],陈开周[1]

(1. 西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071;2. 西安科技学院 基础部,陕西,西安 710054)

摘要:给出一类半线性椭圆方程的正整体解的存在性及渐近性态。以上下解方法为主要工具得到了如下主要结果:此类方程在不同条件下存在无穷多个正整体解,其渐近性态是每个解满足不同的衰退特征。

关 键 词:半线性椭圆方程;上下解;正整体衰退解

中图分类号:O175.9 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274 X (2001)01-0015-04

近年来人们对二阶非线性椭圆方程整体解存在性进行了广泛研究,从初期较简单形式[1~4]到较复杂形式[5~7]均有较好结果,诸多充分条件对不同方程得到了不同的结果。一般所用工具是上下解方法,特别是文献[2]考虑了较普遍的半线性椭圆方程

$$Lu + f(x,u,\nabla u) = 0,\quad x \in R^n,$$

这里

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i,\ \nabla = (D_1, D_2, \cdots, D_n),$$

给出了此方程衰退正整体解的存在性定理。本文用径向解结合上下解方法研究更具一般性的方程

$$\Delta u - m^2 u + f(x,u,\nabla u) = 0,\quad x \in R^n,$$

这里 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}$,$m$ 是常数。我们先在先给出此方程的径向解及上下解引理;然后给出存在衰退正整体解的两个定理;最后将这些结果用于两个具体的方程。

1 径向解

考虑方程

$$\Delta u - m^2 u + f(x,u,\nabla u) = 0,\quad x \in R^n, n \geqslant 2, \tag{1}$$

这里 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。一个径向函数 $u = y(|x|)$ 是式(1)的一个解,当且仅当 $y(t)$ 为下列常微分方程的解

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{n-1}{t}y' - m^2 y + g(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = c, y'(0) = 0, & c \text{ 为常数}, \end{cases} \tag{2}$$

式(2)对应的齐次方程为

$$Lz = z'' + \frac{n-1}{t}z' - m^2 z = 0,\quad t > 0, \tag{3}$$

定义

$$\xi(t) = t^{-v}I_v(mt), v = \frac{n}{2} - 1, \tag{4}$$

$$\eta(t) = \xi(t)\int_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s^{n-1}\xi^2(s)} \quad 。 \tag{5}$$

这里

$$I_v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{T}{2}\right)^{v+2k}$$

是变形 Bessel 函数。

易知 $\xi(t), \eta(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是 C^2 的,利用下列事实[8]:$I_v(t) \sim (\Gamma(v+1))^{-1}(t/2)^v, t \to 0^+$;$I_v(t) \sim (2\pi t)^{-1/2}e^t, t \to +\infty$ 以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{-v}I_v(mt)) = mt^{-v}I_{v+1}(mt)$ 得到

$$\xi(t) \sim (2\pi m)^{-1/2}t^{-(n-1)/2}e^{mt},\quad t \to +\infty, \tag{6}$$

$$\eta(t) \sim (2\pi m)^{-1/2}t^{-(n-1)/2}e^{-mt},\quad t \to +\infty, \tag{7}$$

$$\xi'(t) \sim m(2\pi m)^{-1/2}t^{-(n-1)/2}e^{mt},\quad t \to +\infty, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)t^{n-1}\xi^2(t) = \lim_{t\to\infty}t^{n-1}\xi(t)\eta(t) = 1, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\varphi(t)t^{n-1}\xi(t) = 0, \tag{10}$$

收稿日期:1999-09-13

基金项目:国家部委预研基金资助项目(DJ7.2.2)

作者简介:张全举(1964-),男,陕西武功人,西安建筑科技大学副教授,从事微分析方程及优化理论研究。

这里 $$\varphi(t)=\int_t^{\infty}\frac{ds}{s^{n-1}\xi^2(s)}\quad。\tag{11}$$

式(3) 中微分算子 Lz 可用 $\xi(t)$ 分解为[4]

$$Lz=\frac{1}{t^{n-1}\xi(t)}\frac{d}{dt}(t^{n-1}\xi(t)\frac{d}{dt}(\frac{z}{\xi(t)})),$$

将式(2) 重写为

$$\frac{d}{dt}(t^{n-1}\xi^2(t)\frac{d}{dt}(\frac{y}{\xi(t)}))+t^{n-1}\xi(t)g(t)=0,$$
$$t>0\tag{12}$$

设 $y\in C^2[0,\infty)$ 为式(12) 的解并满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)/\xi(t)=\alpha$，$\alpha$ 为某常数，将式(12) 两边积分两次并注意到 $t^{n-1}\xi^2(t)\frac{d}{dt}(\frac{y(t)}{\xi(t)})=t^{n-1}[\xi(t)y'(t)-\xi'(t)y(t)]\to 0$，$t\to 0^+$ 可得

$$y(t)=\xi(t)(\alpha+\int_t^{\infty}\frac{dr}{r^{n-1}\xi^2(r)}\int_0^r s^{n-1}\xi(s)g(s)ds),$$

或等价的

$$y(t)=\xi(t)(\alpha+\varphi(t)\int_0^t s^{n-1}\xi(s)g(s)ds+\int_t^{\infty}\varphi(s)s^{n-1}\xi(s)g(s)ds),\tag{13}$$

这里 $t\geqslant 0$，$\varphi(t)$ 由式(11) 定义。

反之若$\int_0^{\infty}\varphi(t)t^{n-1}\xi(t)g(t)dt$ 收敛，则由式(13) 定义的 $y(t)\in C^2[0,\infty)$ 且满足式(12)，因此，$u(x)=y(|x|)$ 为式(1) 的一个整体解。为方便起见将式(13) 改写为

$$\xi(t)(\alpha+\int_0^{\infty}\chi_t(s)s^{n-1}\xi(s)g(s)ds),\tag{14}$$

其中 $$\chi_t(s)=\begin{cases}\varphi(t), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ \varphi(s), & t\leqslant s<\infty,\end{cases}$$

还需做如下假定：(H_1) $f(x,u,p)$ 在 $R^n\times R^+\times R^n$ 上是局部 Hölder 连续函数(指数 $\theta\in(0,1)$)；(H_2) 对任何有界域 Ω 及任意常数 $M>0$，存在常数 $\rho(\Omega,M)>0$ 使 $|f(x,u,p)|\leqslant\rho(\Omega,M)(1+|p|^2)$ 对 $x\in\Omega$，$0\leqslant u\leqslant M$，$p\in R^n$ 成立。

引　理　设(H_1) 与(H_2) 成立，若存在两个正函数 $v\in C^2(R^n)$，$w\in C^2(R^n)$ 满足

$$\Delta v-m^2v+f(x,v,\nabla v)\geqslant 0,\quad x\in R^n,\tag{15}$$
$$\Delta w-m^2w+f(x,w,\nabla w)\leqslant 0,\quad x\in R^n,\tag{16}$$
$$v(x)\leqslant w(x),\quad x\in R^n,\tag{17}$$

则方程

$$\Delta u-m^2u+f(x,u,\nabla u)=0,\quad x\in R^n\tag{18}$$

有一个解 $u(x)\in C^2(R^n)$ 满足

$$v(x)\leqslant u(x)\leqslant w(x),\quad x\in R^n。\tag{19}$$

证明见文献[2]，一个满足式(15) 的 v 称为式(18) 的一个下解，满足式(16) 的 w 称为式(18) 的一个上解。

2　衰退解

除(H_1-H_2) 外，我们再作如下假设：(H_3) 存在定义于$[0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上连续函数 $F(t,u,s)$，关于 u,s 非减且

$$|f(x,u,p)|\leqslant F(|x|,u,|p|),$$
$$(x,u,p)\in R^n\times(0,\infty)\times R^n。$$

(H_4) 对固定 $t\geqslant 0$，$u>0$，$s\geqslant 0$，$F(t,\lambda u,\lambda s)/\lambda$ 关于 $\lambda\in(0,\infty)$ 非增，且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}F(t,\lambda u,\lambda s)/\lambda=0。\tag{20}$$

(H_5) 存在定义于$[0,\infty)\times(0,\infty)\times[0,\infty)$ 上正连续函数 $G(t,u,s)$ 关于 u,s 非增，且 $f(x,u,p)\geqslant G(|x|,u,|p|)$，$(x,u,p)\in R^n\times(0,\infty)\times R^n$。

下面我们将证明式(18) 在不同条件下分别存在满足下面条件的正整体解(衰退正整体解)

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0,\tag{21}$$
$$C_1\eta(|x|)\leqslant u(x)\leqslant C_2\eta(|x|),\ |x|\geqslant 1,\tag{22}$$
$$C_1>0,C_2>0\ \text{为常数},$$

以下恒设$(H_1)-(H_5)$ 成立。

定理 1　若

$$\int_0^{\infty}F(s,c,c(\xi'(s)+1))ds<\infty,\tag{23}$$

对某 $c>0$ 成立，则式(18) 存在正整体解满足式(21)。

证　明　令 $J(\tau)=\int_0^{\infty}F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds$，对 $0<\tau\leqslant c$，$J(\tau)\leqslant J(c)$，及 $\tau>c$，$\frac{1}{\tau}J(\tau)\leqslant\frac{1}{\tau}J(c)$。由此知 $\frac{1}{\tau}J(\tau)\to 0$，$(\tau\to\infty)$，记 $M=\sup\limits_{t>\epsilon}[\varphi(t)t^{n-1}\xi^2(t)]$，由式(9) 知 $M<\infty$，取 $\tau>0$ 充分大，使 $J(\tau)\leqslant\tau/M$，

$$\int_0^{\infty}\varphi(s)s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds<\tau\ 。$$

定　义　$y_1(t)=\xi(t)\int_0^{\infty}\chi_t(s)s^{n-1}\xi(s)G(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds,\quad t\geqslant 0,$

$$y_2(t)=\xi(t)\int_0^{\infty}\chi_t(s)s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds,\quad t\geqslant 0,$$

则 $\quad 0<y_1(t)\leqslant y_2(t)。$

$$y_2(t)\leqslant\varphi(t)t^{n-1}\xi^2(t)\int_0^t[\xi(s)/\xi(t)]F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds+\int_t^{\infty}\varphi(s)s^{n-1}\xi^2(s)\,F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds\leqslant$$

$$M(\int_0^t[\xi(s)/\xi(t)]F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds+$$
$$\int_t^\infty F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds)\leqslant MJ(\tau)\leqslant\tau,$$

由单调收敛定理知

$$\lim_{t\to+\infty}y_2(t)=0。\qquad(24)$$

记 $\Phi(t)=\int_0^\infty\chi_t(s)s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds$,

则

$$|y'_i(t)|\leqslant\xi'(t)\Phi(t)+\xi'(t)|\Phi'(t)|\leqslant$$
$$\xi'(t)\Phi(t)+\int_0^\infty F(s,\tau,\tau(\xi'(s)+1))ds\leqslant$$
$$\tau(\xi'(t)+1),\quad i=1,2,t\geqslant0,$$

从而 $G(t,\tau,\tau(\xi'(t)+1))\leqslant G(t,y_1(t),|y'_1(t)|)$,

$$F(t,\tau,\tau(\xi'(t)+1))\geqslant F(t,y_2(t),|y'_2(t)|)。$$

由第1节并结合方程

$$y''_1+((n-1)/t)y'_1-m^2y_1+$$
$$G(t,\tau,\tau(\xi'(t)+1))=0,\quad t>0;$$
$$y''_2+((n-1)/t)y'_2-m^2y_2+$$
$$F(t,\tau,\tau(\xi'(t)+1))=0,\quad t>0。$$

知 $v(x)=y_1(|x|)$ 及 $w(x)=y_2(|x|)$ 分别是式(18)的下、上解,从而由引理得出式(18)存在解 u 满足 $v(x)\leqslant u(x)\leqslant w(x)$,再由式(24)即得定理结论。

定理2　若

$$\int_0^\infty\eta^{-1}(s)F(s,c\eta(s),c(\xi'(s)+1))ds<\infty,\quad(25)$$

对某 $c>0$ 成立,则式(18)有一正整体解满足式(22)

证　明　设 $\tilde\eta(t)=\min(1,\eta(t)),\rho(t)=\min(\xi(t),\eta(t)),\rho_0=\sup_{t>0}\rho(t)$,

$K(\tau)=\int_0^\infty[1+\varphi(s)]s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1))ds$,由 (H_4) 及式(25)知存在 $\tau>0$ 充分大使

$$K(\tau)/\tau\leqslant\min(1,1/\rho_0),$$
$$\int_0^\infty F(s,\tau\eta(s),\tau(\xi'(s)+1))ds<\tau。$$

定　义

$$y_1(t)=$$
$$\xi(t)\int_0^\infty\chi_t(s)s^{n-1}\xi(s)G(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1)ds,$$
$$t\geqslant0$$
$$y_2(t)=$$
$$\xi(t)\int_0^\infty\chi_t(s)s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1)ds,$$
$$t\geqslant0$$

则

$$y_2(t)\leqslant$$
$$\xi(t)\int_0^\infty\varphi(t)s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1)ds\leqslant$$
$$\eta(t)K(\tau),$$
$$y_2(t)\leqslant$$
$$\xi(t)\int_0^\infty\varphi(s)s^{n-1}\xi(s)F(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1)ds\leqslant$$
$$\xi(t)K(\tau),$$

从而 $y_2(t)\leqslant\tau\eta(t)$ 且 $y_2(t)\leqslant\rho(t)K(\tau)\leqslant\rho_0K(\tau)\leqslant\tau,t\geqslant0$。

故有　$0<y_1(t)\leqslant y_2(t)\leqslant\tau\tilde\eta(t),\quad t\geqslant0$。

又　$|y'_i(t)|\leqslant$

$$\xi'(t)\int_0^\infty F(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1))ds+$$
$$\int_0^\infty(s^{n-1}\xi(s)/t^{n-1}\xi(t))F(s,\tau\tilde\eta(s),(\xi'(s)+$$
$$1))ds\leqslant\tau(\xi'(s)+1),$$
$$i=1,2,t\geqslant0$$

$$F(t,\tau\tilde\eta(t),\tau(\xi'(t)+1))\geqslant F(t,y_2(t),|y'_2(t)|),$$
$$G(t,\tau\tilde\eta(t),\tau(\xi'(t)+1))\leqslant G(t,y_1(t),|y'_1(t)|)。$$

同理,由第1节及方程

$$y''_1((n-1)/t)y'_1-m^2y_1+G(t,\tau\tilde\eta(t),$$
$$(\xi'(t)+1))=0,\quad t>0。$$
$$y''_2+((n-1)/t)y'_2-m^2y_2+$$
$$F(t,\tau\tilde\eta(t),\tau(\xi'(t)+1))=0,\quad t>0。$$

令　$v(x)=y_1(|x|),w(x)=y_2(|x|)$,

则 $v(x)$ 及 $w(x)$ 分别是式(18)的下、上解,由引理知式(18)存在正整体解 $u(x)$ 满足

$$v(x)\leqslant u(x)\leqslant w(x),\quad x\in R^n,\text{又}$$
$$y_1(t)\geqslant$$
$$\xi(t)\int_0^\infty\varphi(t)s^{n-1}\xi(s)G(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1))ds\geqslant$$
$$\eta(t)\int_0^1s^{n-1}\xi(s)G(s,\tau\tilde\eta(s),\tau(\xi'(s)+1))ds=$$
$$C_1\eta(|x|),$$

当 $t>1$ 时,取 $C_2=\tau$ 知 $u(x)$ 满足式(22),证毕。

3　应　用

例1　考虑方程 $\Delta u-m^2u+\varphi(x)(1+u)^\alpha+\psi(x)|\nabla u|^\beta=0,x\in R^n,n\geqslant2,m>0,0<\alpha<1,0<\beta<1,\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 是 R^n 上正的局部Hölder连续函数,而 $(H_1)-(H_4)$ 均满足,$f(x,u,p)=\varphi(x)(1+u)^\alpha+\psi(x)|p|^\beta$。

取　$F(t,u,s)=\Phi^*(t)(1+u)^\alpha+\Psi^*(t)s^\beta$,

$$\Phi^*(t) = \max_{|x|=t}\varphi(x), \quad t \geqslant 0,$$
$$\Psi^*(t) = \max_{|x|=t}\psi(x), \quad t \geqslant 0。$$
$$G(t,u,s) = \Phi_*(t), \Phi_*(t) = \min_{|x|=t}\varphi(x), t \geqslant 0$$

式(23) 即

$$\int_0^\infty \Phi^*(s)\mathrm{d}s < \infty, \int_0^\infty \Psi^*(s)s^{-(n-1)\beta/2}\mathrm{e}^{\beta ms}\mathrm{d}s < \infty。$$

由定理 1 知方程存在衰退正整体解。

例 2 考虑方程 $\Delta u - m^2u + \varphi(x)(1+u)^\alpha + \psi(x)|\nabla u|^\beta = 0, x \in R^n, n \geqslant 2, m > 0, \alpha \leqslant 0, 0 < \beta < 1$,条件$(H_1) - (H_4)$ 均满足。

取 $F(t,u,s) = \Phi^*(t) + \Psi^*(t)s^\beta, \quad t \geqslant 0,$

$$G(t,u,s) = \Phi_*(t)(1+u)^\alpha, \quad t \geqslant 0,$$
$$\Phi^*(t) = \max_{|x|=t}\varphi(x), \quad t \geqslant 0,$$
$$\Psi^*(t) = \max_{|x|=t}\psi(x), \quad t \geqslant 0,$$
$$\Phi_*(t) = \min_{|x|=t}\varphi(x), \quad t \geqslant 0。$$

式(25) 等价于

$$\int_0^\infty \Phi^*(s)s^{(n-1)/2}\mathrm{e}^{ms}\mathrm{d}s < \infty,$$

和 $$\int_0^\infty \Psi^*(s)s^{-(n-1)\beta/2}\mathrm{e}^{\beta ms}\mathrm{d}s < \infty。$$

由定理 2 知方程存在满足式(22)的衰退正整体解。

参考文献:

[1] KAWANO N,KUSANO T. On the elliptic equation $\Delta u = \varphi(x)u^\gamma$ in R^2[J]. Proc Amer Math Soc,1985,93(1):73-78.

[2] NOUSSAIR E S,SWANSON C A. Positive solutions of quasilinear elliptic equations in exterior domains [J] . J Math Anal Appl,1980,75(1):121-133.

[3] 朱喜平. R^n 上半线性椭圆方程的多解性[J]. 数学学报,1989,32(1):20-34.

[4] NOBUYOSHI,FUKAGAI. Positive entire solutions of semilinear elliptic equations[J]. Math Ann,1986,274(1):75-93.

[5] BROWN K J,STAVRAKIS N. Sup and supersolutions for semilinear elliptic equations on all of R^N[J]. Diff and Integ Equns,1994,5(12):1 215-1 225.

[6] 杨海涛. R^n 上一类半线性椭圆方程解的存在惟一性及渐近性态[J]. 数学物理学报,1977,17(4):403-411.

[7] ALVES C O,GONCALVES J V,MIYAGAKI O H. Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in R^n involving critical exponents[J]. Nonlinear Analysis,1998,34(5):593-615.

[8] WATSON G N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions[M]. London:Cambridge,1944.

(编 辑 曾大刚)

On the existence of positive decaying solutions for a class of the nonlinear elliptic equation

ZHANG Quan-ju[1],FENG Fu-ye[2],CHEN Kai-zhou[1]

(1. School of Science,Xidian University,Xi'an 710071,China;2. Department of Basic Courses,Xi'an University of Science and Technology,Xi'an 710054,China)

Abstract:The existence of poitive decaying solution for a class of the semilinear equation is discussed. By using the methods of lower solution and supper solution, the main results are obtained as follows:the equation exists positive decaying entire solutions under proper conditions.

Key words:semilinear elliptic equation; lower and supper solutions; positive decaying entire solutions