第 30 卷第 1 期 温州大学学报·自然科学版 2009 年 2 月
Vol 30, No 1 Journal of Wenzhou University · Natural Sciences Feb, 2009

标的资产价值服从跳跃-扩散过程的美式实物期权定价研究

邱小丽[1]，柴 俊[2]

（1．温州大学城市学院，浙江温州 3250352；2．华东师范大学数学系，上海 200062）

摘 要：时间较长的投资机会对于目前来说是可以近似看作是永久的，因此这样的不可逆的投资机会类似于永久美式看涨期权．本文在初始投资成本是不确定的情况下，探讨了跳幅服从均匀分布的泊松跳跃过程对这样的实物期权价值的影响，发现跳跃过程会提高投资临界值，推迟投资．

关键词：投资机会；实物期权；跳跃-扩散过程；临界值

中图分类号：F830.59 **文献标志码**：A **文章编号**：1674-3563(2009)01-0029-05

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.01.06 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

由于以 DCF（贴现现金流）为代表的传统投资决策方法缺乏考虑项目未来现金流的不确定性和项目执行过程的灵活性，人们把目光转向期权分析方法．在考察实物期权价值时，经常会牵涉到投资中遇到的一些具体问题，比如初始成本、经营成本、竞争和分红等．一些学者考虑到除标的资产外，其余参数也可能具有不确定性，于是假设利率[1]或初始成本[2-3]等也服从布朗运动．更有甚者，把泊松跳跃过程也考虑进去[4-5]．很多学者都把投资机会看作是欧式看涨期权[5]，或认为泊松跳跃中的跳幅是常数[5]．本文研究风险中性世界里跳幅服从均匀分布的泊松跳跃过程对美式永久实物期权价值的影响．

1 基本假设

假设投资者有机会投资于某项目，拥有此机会的时间较长，我们可以将此机会近似看作是永久的．若他进行投资，付出初始成本 I，就可以获得价值为 V 的项目，V 是项目经营带来的净现金流的贴现之和．假设初始成本 I 服从几何布朗运动，项目价值 V 服从跳跃-扩散运动，即

$$\frac{dV}{V}=(\alpha_V-\lambda k)dt+\sigma_V dW_V+Ydq \tag{1}$$

$$\frac{dI}{I}=\alpha_I dt+\sigma_I dW_I \tag{2}$$

其中 α_V 和 α_I 是 V 和 I 的期望增长率，α_V 是 V 无跳跃发生时的收益率的标准差，α_I 是 I 的波动率，W_V 和 W_I 是标准维纳过程．由于一些共同的宏观经济的冲击，V 与 I 之间的不确定性是相关

收稿日期：2008-10-21

基金项目：温州大学城市学院科研项目(Kyzd200801)

作者简介：邱小丽(1981-)，女，浙江瑞安人，助教，硕士，研究方向：金融数学

的，相关系数为 ρ，即 $\mathrm{cov}(dW_V, dW_I) = \rho dt$．$q$ 为服从参数为 λ 的泊松过程，W_V、W_I 和 q 是相互独立，Y 是投资项目价值的相对跳跃高度，且 $k = E(Y)$，则 $Y \geq -1$．

一旦作出投资，投资成本中更进一步的不确定性是无关的．设 μ_V 和 μ_I 为分别适用于 V 与 I 的经风险调整的贴现率，记 $\delta_V = \mu_V - \alpha_V$，$\delta_I = \mu_I - \alpha_I$，则 $\delta_V > 0, \delta_I > 0$，否则存在套利．$\delta_V$ 可理解为投资项目的红利率，δ_I 可理解为拥有投资所需商品的便利收益[2]．

2 投资机会的定价模型

投资者拥有的这个投资机会相当于一张永久美式看涨期权．当 V/I 较小时，投资者不进入投资，相当于持有这张期权；当 V/I 充分大时，投资者进入投资，执行了这张期权，此时的执行价格就是进行该投资的初始成本 I．对于投资者来说，最关键的是何时是进行投资的最佳时间，或者说投资的最优执行边界是什么．设投资机会价值为 C，则它是 V 和 I 的二元函数．当已进入投资状态，则此时的投资机会价值就转化为经营项目所带来的利润，即

$$C = V - I \tag{3}$$

我们需要找出的是等待时期投资机会的价值．构造投资组合 $\Pi = C - mV - nI$，m 和 n 分别是 t 时刻卖空的标的资产和初始成本的份额，并考察该组合在时间段 $[t, t+dt]$ 的变化情况．因跳跃部分带来的风险是与市场无关的“非系统”风险，可以认为投资组合 Π_t 的期望收益率是无风险收益[6]28-31，即

$$E(d\Pi) = r\Pi dt \tag{4}$$

在 $[t, t+dt]$ 时段内，该组合变化有两种可能：若跳跃事件不发生，则

$$d\Pi_1 = (\frac{\partial C}{\partial V} - m)dV + (\frac{\partial C}{\partial I} - n)dI + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}\sigma_V^2 V^2 + 2\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial I}\rho\sigma_V\sigma_I VI + \frac{\partial^2 C}{\partial I^2}\sigma_I^2 I^2)dt$$

若跳跃事件发生，则

$$d\Pi_2 = C((1+Y)V, I) - C(V, I) - mYV$$

关于跳跃事件取期望，得

$$E(d\Pi) = (1 - \lambda dt)d\Pi_1 + \lambda dt d\Pi_2$$

由于持用空头，必须做出相应于项目的红利和初始成本的便利收益的支付 $(m\delta_V V + n\delta_I I)dt$．取 $m = \frac{\partial C}{\partial V}$，$n = \frac{\partial C}{\partial I}$，消除投资组合的风险因素，并在等式（4）两边关于 Y 取期望，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma_V^2 V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + \rho\sigma_V\sigma_I VI\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial I} + \sigma_I^2 I^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial I^2} + (r - \lambda k - \delta_V)V\frac{\partial C}{\partial V} \\ &+ (r - \delta_I)I\frac{\partial C}{\partial I} + \lambda E_Y[C((1+Y)V, I) - C(V, I)] = rC\end{aligned} \tag{5}$$

设最优投资边界为 (V^*, I^*)，则有如下的价值匹配公式与平滑粘贴公式：

$$\begin{aligned}&C(V^*, I^*) = V^* - I^* \\ &C_V(V^*, I^*) = 1 \\ &C_I(V^*, I^*) = -1\end{aligned} \tag{6}$$

当项目价值V趋于零时，该投资机会就无任何价值，即

$$C(V,I)\to 0 \quad (V\to 0) \tag{7}$$

因此，当$V/I\le V^*/I^*$时，投资机会价值$C(V,I)$满足公式（5）；当$V/I>V^*/I^*$时，投资机会价值$C(V,I)$如公式（3）所示.

3 定价模型的求解

作自变量变换$x=\dfrac{V}{I}$以及函数代换$F(x)=\dfrac{C(V,I)}{I}$[6]51-52,将二维美式实物期权$C(V,I)$转化为一维美式实物期权$F(x)$的自由边界问题：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sigma^2x^2F''+(\delta_I-\delta_V-\lambda k)xF'+\lambda E_Y[F((1+Y)x)-F(x)]=\delta_I F \quad (x\le x^*)\\ F(x)=x-1 \quad (x>x^*)\\ F(x^*)=x^*-1;\quad F'(x^*)=1;\quad F(0)=0\end{cases} \tag{8}$$

其中$\sigma^2=\sigma_V^2-2\rho\sigma_V\sigma_I+\sigma_I^2$，$x^*=V^*/I^*$为$F(x)$的最优投资临界值.

假设现在已知跳跃是向下的，且Y服从均匀分布，则$k=-\dfrac{1}{2}$，$E[(1+Y)^B]=\dfrac{1}{B+1}$. 若$x$属于继续持有区，$(1+Y)x$也属于继续持有区，从而此时$F((1+Y)x)$与$F(x)$的表达式一样.

设该方程有形式解$F(x)=Ax^B$，A和B为待定常数，将该解代入方程，得B满足下列方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2B(B-1)+(\delta_I-\delta_V+\frac{1}{2}\lambda)B-(\lambda+\delta_I)+\lambda\frac{1}{B+1}=0 \tag{9}$$

上式两边乘以$B+1$，然后令左边为$g_\lambda(B)$，即

$$g_\lambda(B)=\frac{\sigma^2}{2}B^3+(\delta_I-\delta_V+\frac{\lambda}{2})B^2-\frac{1}{2}(\sigma^2+\lambda+2\delta_V)B-\delta_I$$

则 $g_\lambda(-1)=\lambda>0$，$g_\lambda(0)=-\delta_I<0$，$g_\lambda(1)=-\delta_V<0$，$g_\lambda(-\infty)=-\infty$，$g_\lambda(+\infty)=+\infty$ ，且$g_\lambda(B)$在$(-\infty,+\infty)$上先凹后凸. 因此，方程（9）有两个负根和一个大于 1 的正根. 由于$F(0)=0$，得B应取正根，记为B_1. 再由方程（8），得

$$x^*=\frac{B_1}{B_1-1},\quad A=\frac{1}{B_1}(\frac{B_1}{B_1-1})^{1-B_1} \tag{10}$$

于是，投资机会价值$C(V,I)$的表达式如下：

$$C(V,I)=\begin{cases}AV^{B_1}I^{1-B_1}, & V\le\dfrac{B_1}{B_1-1}I\\ V-I, & V>\dfrac{B_1}{B_1-1}I\end{cases} \tag{11}$$

至此，我们已经解决了跳跃-扩散条件下的投资决策问题：当项目价值V低于$B_1/(B_1-1)$倍初始成本时，投资者不进入投资，处于等待状态；一旦项目价值V超过$B_1/(B_1-1)$倍初始成本

时，投资者可以马上进入投资．最优投资时间为$T^* = \inf\{V_t \ge I_t B_1/(B_1 - 1)\}$．

4 定价模型的结果

下面我们分析跳跃过程的产生对投资决策的影响．设σ_V、σ_I、δ_V、δ_I和ρ已知，则方程（9）显示B_1是λ的函数，即

$$g_\lambda(B_1) = \frac{\sigma^2}{2}B_1^{\ 3} + (\delta_I - \delta_V + \frac{\lambda}{2})B_1^{\ 2} - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \lambda + 2\delta_V)B_1 - \delta_I = 0$$

由$g_\lambda(B)$的性态知

$$\frac{\partial g_\lambda(B_1)}{\partial B_1} = \frac{3\sigma^2}{2}B_1^{\ 2} + 2(\delta_I - \delta_V + \frac{\lambda}{2})B_1 - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \lambda + 2\delta_V) > 0$$

$$\frac{\partial g_\lambda(B_1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}(B_1^{\ 2} - B_1) > 0$$

因此，$\dfrac{dB_1}{d\lambda} = -\dfrac{\partial g_\lambda(B_1)}{\partial \lambda}\bigg/\dfrac{\partial g_\lambda(B_1)}{\partial B_1} < 0$．

我们得出：随着λ的增大，B_1减小，从而$B_1/(B_1 - 1)$增大．这是因为存在跳跃，标的资产未来价格的不确定性增加，而且跳跃产生的可能性越大，不确定性越大，投资风险也越大，那么投资者会期待投资具有更高的收益．也就是说，当标的资产的价格高于初始投资成本的比例达到某一程度时，投资者才会进行投资行为．因此，跳跃的存在提高投资临界值，从而推迟投资行为．

设$h_{B_1}(x) = Ax^{B_1}$，$0 \le x \le \dfrac{B_1}{B_1 - 1}$，其中$A$如公式（10）所示，则$h_{B_1}(x)$关于$B_1$是递减的．因为$\ln h_{B_1}(x) = -B_1 \ln B_1 + (B_1 - 1)\ln(B_1 - 1) + B_1 \ln x$在$0 \le x \le \dfrac{B_1}{B_1 - 1}$时关于$B_1$是递减的．因此，$h_{B_1}(x)$的值随着$\lambda$的增大而增大．于是当$V \le \dfrac{B_1}{B_1 - 1}I$时，$C(V, I)$随着$\lambda$的增大而增大．

由于投资的时间选择具有价值，若在某个时间投资，则失去了等待更适合投资时间的机会，因此期权价值应该作为机会成本在投资决策中考虑．在跳跃的存在使投资风险增加的情形下，投资机会成本增加，从而投资期权价值增加，投资者不敢贸然进入投资，他们会先处于观望状态，以等待更多信息的到来，通过降低不确定性来降低风险．跳跃的可能性越大，等待就越有价值，投资行为就越会被延迟．

此时我们看到：跳跃的可能产生不仅提高了投资临界值，还增加了投资期权的价值，使得等待更有价值，加强了对等待的激励．

5 算例分析

设$\delta_V = \delta_I = 0.04, \sigma_V = \sigma_I = 0.2, \rho = 0.1,$代入$g_\lambda(B)$，得

$$g_\lambda(B_1) = 0.036B_1^{\ 3} + \frac{\lambda}{2}B_1^{\ 2} - (0.076 + \frac{\lambda}{2})B_1 - 0.04 = 0$$

λ分别取 0、0.1 和 1 时，B_1的值分别为 1.67、1.48 和 1.13，$\frac{B_1}{B_1-1}$的值分别为 2.50、3.08 和 8.65．比较λ在三种取值情况下的投资临界值，我们发现：模型是否考虑跳跃过程，存在明显的差异，尤其是在跳跃过程发生可能性很大时．可见，不能忽略一些重大信息对标的资产的价格造成的跳空现象的影响．

参考文献

[1] Merton R C. Option Pricing when Underlying Stock Return Are Discontinuous [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3: 125-144.

[2] Dixit A K, Pindick R S. 不确定条件下的投资[M]. 朱勇, 译. 北京: 中国人民大学出版社, 2002: 192-211.

[3] 尹海员, 李忠民. 行权成本变化时美式实物期权定价方法研究[J]. 科技管理研究, 2007, (6): 260-262.

[4] 陈超, 邹捷中, 侯振挺. 利率服从跳-扩散过程的期权定价[J]. 数量经济技术经济研究, 2000, (11): 39-41.

[5] 冯广波, 马超群. 竞争条件下利率服从跳-扩散过程的实物期权价值评估研究[J]. 海南大学学报: 人文社会科学版, 2007, 25(2): 165-168.

[6] 姜礼尚. 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

Pricing of American-style Real Option when Value of Underlying Asset Follows Jump-diffusion Process

QIU Xiaoli[1], CHAI Jun[2]

(1. City College, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035; 2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai, China 200062)

Abstract: Contrasted to present practices, the continual investment opportunities could almost be regarded as permanent opportunities. Therefore, such irreversible investment opportunities could be treated as a permanent American-style call option. In this paper, we have explored how a certain Poisson jump, in which the process jump rate had obeyed uniform distribution, had affected the value of this kind of real option while the initial investment cost was the uncertainty. And we found that the jump process will raise investment threshold and further delay the investment.

Key words: Investment opportunities; Real options; Jump-diffusion process; Threshold

（编辑：赵肖为）