ISSN 1673-9418 CODEN JKYTA8
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
1673-9418/2009/03(02)-0210-08
DOI:10.3778/j.issn.1673-9418.2009.02.009

E-mail:fcst@public2.bta.net.cn
http://www.ceaj.org
Tel:+86-10-51616056

# Łukasiewicz 三值逻辑系统中的随机化研究 *

王庆平,张兴芳
聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059

# Stochastic Study in Łukasiewicz's Ternary Logic System*

WANG Qingping, ZHANG Xingfang
School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252059, China

**WANG Qingping, ZHANG Xingfang. Stochastic study in Łukasiewicz's ternary logic system. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2009,3(2):210-217.**

**Abstract:** $D_{L_3}$-stochastic truth degree of formulas in ternary logic $L_3$ is presented by using stochastic method on evaluation sets. It is proved that the set of stochastic truth degree of all formulas has no isolated point. The conceptions of $D_{L_3}$-similarity degree and pseudo-metric on two formulas are given. $D_{L_3}$-logic metric space is built. And it is proved that this space has no isolated point.
**Key words:** stochastic truth degree; similarity degree; logic metric space

**摘 要:**利用赋值集的随机化方法,在三值逻辑 $L_3$ 中提出了公式的随机真度,证明了所有公式的随机真度之集在[0,1]中没有孤立点;给出了两公式间的 $D_{L_3}$-相似度与伪距离的概念,并建立了 $D_{L_3}$-逻辑度量空间,证明了此空间没有孤立点。
**关键词:**随机真度;相似度;逻辑度量空间
**文献标识码:**A **中图分类号:**O14.1

## 1 引言

在经典的命题逻辑中,最基本的推理模式为 $\{A_1,\cdots,A_n\}\vdash A^*$,也就是在前提 $A_1,\cdots,A_n$ 为真的情况下,得到的结论 $A^*$ 也为真。但这一推理的前提是否可

* The Key Technologies Project of the Ministry of Eucation of China No.206089 (国家教育部科学技术研究重点项目); the Research Project of Liaocheng University No.x071043 (聊城大学校级科研项目).
Received 2008-07, Accepted 2008-10.

靠并未考虑，因此，20 世纪 70 年代以来，逐渐兴起了概率逻辑学的研究[1-5]，在概率逻辑学中，对推理前提集中的各公式而言，要考虑其“不确定性”，也就是，要考虑前提集中各公式为真的概率。王国俊教授在文献[6]中提出了计量逻辑学理论，在计量逻辑学中，每个公式都被赋予了一个真度。但在该真度的意义下，每个原子公式都有相同的值为$\frac{1}{2}$的真度，用概率的观点来考虑，即每个原子公式 $q$ 为真的概率 $P(q)$均为$\frac{1}{2}$。这种把每个原子公式的真度等同看待的观点似乎与现实世界中各种简单命题成立的概率不尽相同的事实相悖。因此在文献[7]中，利用随机数列的概念，提出了公式的随机真度的概念，并研究了其性质。本文在文献[7]的基础上，基于 Łukasiewicz 逻辑系统 $L_3$，提出了三值随机序列的概念，并给出了三值 $D_{L_3}$-随机真度的定义，证明了所有公式的随机真度之集 $\{\tau_{D_{L_3}}(A)|A\in F(S)\}$在$[0,1]$中没有孤立点；给出了两公式间的 $D_{L_3}$-相似度与伪距离的概念，建立了 $D_{L_3}$-逻辑度量空间，证明了此空间没有孤立点。

## 2 准备知识

**定义 1** 设 $S=\{q_1,q_2,\cdots\}$是可数集，$\neg$ 与$\vee$，$\to$分别是一元运算与两个二元运算，由 $S$ 生成的$\{\neg,\vee,\to\}$型的自由代数记作 $F(S)$。$F(S)$中的元素叫命题、句子或公式，$S$ 中的元素叫原子命题或原子公式。

在三值逻辑系统 $L_3$ 中，用 $p,q,r$ 等表示命题，用$\neg p$ 表示 $p$ 的否定，分别用 $p\vee q$ 与 $p\wedge q$ 表示 $p$ 与 $q$ 的析取与合取，用 $p\to q$ 表示 $p$ 蕴涵 $q$，则 Łukasiewicz 给出的真值定义如下：$\neg p=1-p$，$p\vee q=\max\{p,q\}$，$p\wedge q=\min\{p,q\}$，$p\to q=(1-p+q)\wedge 1$，$(p,q\in\{0,\frac{1}{2},1\})$。

**定义 2** 设 $S$ 是非空集，$F(S)$是由 $S$ 生成的$(\neg,\vee,\to)$型自由代数，即 $F(S)$是全部公式（命题）之集，$L=\{1,\frac{1}{2},0\}$是 Łukasiewicz 三值逻辑系统，$v:F(S)\to L$ 是映射，如果 $v$ 对于$\neg$，$\vee$，$\to$运算保持同态，则称 $v$ 为 $F(S)$的一个赋值。以 $\Omega$ 记全体赋值之集。

**定义 3** 设 $A\in F(S)$，如果对每个赋值 $v\in\Omega$，恒有 $v(A)=1$，则称 $A$ 为重言式；如果对每个赋值 $v\in\Omega$，恒有 $v(A)=0$，则称 $A$ 为矛盾式。

**定义 4** 设 $N=\{1,2,\cdots\}$，$D=(p_1,p_2,\cdots)$，$0<p_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$，称 $D$ 为$(0,1)$中的一个随机数列。

**注 1** （1）$P_1,P_2,\cdots$的值是各自独立的，不要求 $P_1+P_2+\cdots=1$。

（2）不考虑 $P_n=0$ 或 $P_n=1$ 的情形。因为 $P_n=0$ 表示原子命题 $q_n$ 不会发生，从而可以从 $S$ 中将 $q_n$ 删去。类似地，若 $P_n=1$，原子命题 $q_n$ 可与重言式等同看待，所以也可以从 $S$ 中删去 $q_n$ 而不影响下面的讨论。

## 3 随机化映射与逻辑公式的 $D_{L_3}$-真度

**定义 5** 设 $D_0=(P_{01},P_{02},\cdots)$，$D_{\frac{1}{2}}=(P_{\frac{1}{2}1},P_{\frac{1}{2}2},\cdots)$，$D_1=(P_{11},P_{12},\cdots)$为$(0,1)$中的三个随机数列，且 $P_{0n}+P_{\frac{1}{2}n}+P_{1n}=1(n=1,2,\cdots)$，则称 $D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为三值随机序列。

**定义 6** 设 $A=A(q_1,\cdots,q_n)\in F(S)$，则 $A$ 对应着一个 $n$ 元三值函数 $f_A:\{0,\frac{1}{2},1\}^n\to\{0,\frac{1}{2},1\}$如下：$\forall\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n$ 用 $x_k$ 取代 $A(q_1,\cdots,q_n)$ 中的 $q_k(k=1,\cdots,n)$，并按

$$x_k\to x_l=\begin{cases}1, & x_k=x_l=\frac{1}{2}\\(1-x_k)\vee x_l, & 其他\end{cases}$$

$x_k\vee x_l=\max\{x_k,x_l\}$，$x_k\wedge x_l=\min\{x_k,x_l\}$和$\neg x_k=1-x_k$ 解释逻辑连接词$\to$，$\vee$，$\wedge$与$\neg$，则得 $f_A(x_1,\cdots,x_n)$。称 $f_A$ 为 $A$ 诱导的三值函数。

**定义 7** 设 $D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为$(0,1)$中的三值随机序列，$\forall\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n$，令

$$\varphi(\alpha)=Q_1\times\cdots\times Q_n$$

这里当 $x_k=0$ 时,$Q_k=P_{0k}$;当 $x_k=\frac{1}{2}$ 时,$Q_k=p_{\frac{1}{2}k}$;当 $x_k=1$ 时,$Q_k=p_{1k}(k=1,\cdots,n)$,则得一映射:

$$\varphi:\{0,\frac{1}{2},1\}^n\to(0,1)$$

称 $\varphi$ 为$\{0,\frac{1}{2},1\}^n$的 $D_{L_3}$-随机化映射。

**命题 1** $\varphi$ 为$\{0,\frac{1}{2},1\}^n$的 $D_{L_3}$-随机化映射,则 $\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n\}=1$。

**证明**

$(p_{01}+p_{\frac{1}{2}1}+p_{11})\times\cdots\times(p_{0n}+p_{\frac{1}{2}n}+p_{1n})=$

$\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n\}=1$,而

$(p_{01}+p_{\frac{1}{2}1}+p_{11})\times\cdots\times(p_{0n}+p_{\frac{1}{2}n}+p_{1n})=1$

所以$\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n\}=1$。 □

**定义 8** 设 $A=A(q_1,\cdots,q_n)\in F(S)$,令

$$[A_{\frac{1}{2}}]=\overset{-1}{f_A}(\frac{1}{2}),[A_1]=\overset{-1}{f_A}(1)$$

$$\mu[A_{\frac{1}{2}}]=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overset{-1}{f_A}(\frac{1}{2})\}$$

$$\mu[A_1]=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overset{-1}{f_A}(1)\}$$

$$\mu[A]=\frac{1}{2}\times\mu[A_{\frac{1}{2}}]+1\times\mu[A_1]$$

将$\mu[A]$记为 $\tau_{D_{L_3}}(A)$,称 $\tau_{D_{L_3}}(A)$为 $A$ 的 $D_{L_3}$-随机真度,简称为 $D_{L_3}$-真度。

**命题 2** 设 $A,B\in F(S)$,如果对$\forall\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n$,有$f_A\leqslant f_B$,则 $\tau_{D_{L_3}}(A)\leqslant\tau_{D_{L_3}}(B)$。

**定理 1** 设 $A\in F(S)$,$D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为$(0,1)$中的三值随机序列,则 $A$ 是重言式当且仅当 $\tau_{D_{L_3}}(A)=1$,$A$ 是矛盾式当且仅当 $\tau_{D_{L_3}}(A)=0$。

**证明** 设 $A=A(q_1,\cdots,q_n)$是重言式,则$[A_1]=\{0,\frac{1}{2},1\}^n$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(A)=1\times\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n\}=1$$

反过来,设 $A$ 不是重言式,则存在 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\notin\overset{-1}{f_A}(1)$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(A)<1\times\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n\}=1$$

同理可证 $A$ 是矛盾式当且仅当 $\tau_{D_{L_3}}(A)=0$。 □

**命题 3** 设 $A,B\in F(S)$,则:

(1)$\tau_{D_{L_3}}(A\vee B)=\tau_{D_{L_3}}(A)+\tau_{D_{L_3}}(B)-\tau_{D_{L_3}}(A\wedge B)$;

(2)如果 $A=A(q_1,\cdots,q_n)$,$B=B(q_{n+1},\cdots,q_{n+m})$,则 $\tau_{D_{L_3}}(A)\times\tau_{D_{L_3}}(B)\leqslant\tau_{D_{L_3}}(A\wedge B)$。

**证明** (1)因为:

$$[(A\vee B)_1]=\overset{-1}{f_{A\vee B}}(1)=\overset{-1}{f_A}(1)\cup\overset{-1}{f_B}(1)$$

$$[(A\vee B)_{\frac{1}{2}}]=\overset{-1}{f_{A\vee B}}(\frac{1}{2})=\overset{-1}{f_A}(\frac{1}{2})\cup\overset{-1}{f_B}(\frac{1}{2})$$

$$[A_1]=\overset{-1}{f_A}(1),[B_1]=\overset{-1}{f_B}(1)$$

$$[A_{\frac{1}{2}}]=\overset{-1}{f_A}(\frac{1}{2}),[B_{\frac{1}{2}}]=\overset{-1}{f_B}(\frac{1}{2})$$

$$[(A\wedge B)_1]=\overset{-1}{f_{A\wedge B}}(1)=\overset{-1}{f_A}(1)\cap\overset{-1}{f_B}(1)$$

$$[(A\wedge B)_{\frac{1}{2}}]=\overset{-1}{f_{A\wedge B}}(\frac{1}{2})=\overset{-1}{f_A}(\frac{1}{2})\cap\overset{-1}{f_B}(\frac{1}{2})$$

根据测度的可加性质,知:

$$\mu[(A\vee B)_1]=\mu[A_1]+\mu[B_1]-\mu[(A\wedge B)_1]$$

$$\mu[(A\vee B)_{\frac{1}{2}}]=\mu[A_{\frac{1}{2}}]+\mu[B_{\frac{1}{2}}]-\mu[(A\wedge B)_{\frac{1}{2}}]$$

由定义 8 知:

$$\tau_{D_{L_3}}(A\vee B)=\tau_{D_{L_3}}(A)+\tau_{D_{L_3}}(B)-\tau_{D_{L_3}}(A\wedge B)$$

(2)因为$\overset{-1}{f_{A\wedge B}}(\frac{1}{2})=\{f_A=f_B=\frac{1}{2};f_A=1,f_B=\frac{1}{2};f_A=\frac{1}{2},f_B=1\}$,$\overset{-1}{f_{A\wedge B}}(1)=\{f_A=f_B=1\}$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(A\wedge B)=\frac{1}{2}\times(\mu[A_{\frac{1}{2}}]\times+\mu[B_{\frac{1}{2}}]+\mu[A_1]\times\mu[B_{\frac{1}{2}}]+\mu[A_{\frac{1}{2}}]\times\mu[B_1])+1\times\mu[A_1]\times\mu[B_1]$$,而

$$\tau_{D_{L_3}}(A)\times\tau_{D_{L_3}}(B)=(\frac{1}{2}\times\mu[A_{\frac{1}{2}}]+1\times\mu[A_1])\times(\frac{1}{2}\times\mu[B_{\frac{1}{2}}]+1\times\mu[B_1])=\frac{1}{4}\times\mu[A_{\frac{1}{2}}]\times\mu[B_{\frac{1}{2}}]+\frac{1}{2}\times(\mu[A_{\frac{1}{2}}]\times\mu[B_1]+\mu[A_1]\times\mu[B_{\frac{1}{2}}])+1\times\mu[A_1]\times\mu[B_1]\leqslant\tau_{D_{L_3}}(A\wedge B)\quad\square$$

以下研究 $D_{L_3}$-真度在[0,1]中的分布情形,首先介绍两个引理。

**引理 1**[7] 设有序列$\{a_n\}$, $\forall n\in N, a_n\in(0,1)$, $\varepsilon$ 是任给的正数,如果对任意 $n_0\in N$,均有 $a_1\times\cdots\times a_{n_0}\geqslant\varepsilon$,则数列$\{a_n\}$有一个递增的子数列。

**引理 2**[7] 设有序列$\{a_n\}$, $\forall n\in N, a_n\in(0,1)$,且$\{a_n\}$为递减的数列, $0<\varepsilon<1$,则存在 $n_0\in N$,使得 $a_1\times\cdots\times a_{n_0}<\varepsilon$。

**注 2** 引理 1 及 2 的证明见文献[7]。

**定理 2** 设 $D_0=(P_{01},P_{02},\cdots)$, $D_{\frac{1}{2}}=(P_{\frac{1}{2}1},P_{\frac{1}{2}2},\cdots)$, $D_1=(P_{11},P_{12},\cdots)$为(0,1)中的三值随机序列,则 $F(S)$中全体公式的 $D_{L_3}$-真度之集$\{\tau_{D_{L_3}}(A)|A\in F(S)\}$在[0,1]中没有孤立点。

**证明** 设 $A\in F(S)$, $\varepsilon>0$,下面证明存在 $B\in F(S)$,使得$|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B)|<\varepsilon$,且 $\tau_{D_{L_3}}(B)\neq\tau_{D_{L_3}}(A)$。

(1)假设 $\tau_{D_{L_3}}(A)=0$。令 $B(n)=((q_1\vee\neg q_1)\to(q_1\wedge\neg q_1))\wedge\cdots\wedge((q_n\vee\neg q_n)\to(q_n\wedge\neg q_n))$,则

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B(n))\right|=\tau_{D_{L_3}}(B(n))$$

因为,当 $q_1,\cdots,q_n$ 全部取$\frac{1}{2}$时, $B(n)=1$,否则 $B(n)=0$,所以$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B(n))\right|=1\times(p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n})$。

①如果存在 $n_0$,使得 $p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n_0}<\varepsilon$,则

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B(n))\right|<\varepsilon$$

由 $B(n_0)=((q_1\vee\neg q_1)\to(q_1\wedge\neg q_1))\wedge\cdots\wedge((q_{n_0}\vee\neg q_{n_0})\to(q_{n_0}\wedge\neg q_{n_0}))$知

$$\tau_{D_{L_3}}(B(n_0))=1\times(p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n})\neq0$$

因此 $B=B(n_0)=((q_1\vee\neg q_1)\to(q_1\wedge\neg q_1))\wedge\cdots\wedge((q_{n_0}\vee\neg q_{n_0})\to(q_{n_0}\wedge\neg q_{n_0}))$即为所求。

②如果对任意 $n\in N$,均有 $p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n}\geqslant\varepsilon$,根据引理 1,数列$\{p_{\frac{1}{2}n}\}$有一个递增子列$\{p_{\frac{1}{2}i_k}\}$($i\in N,k\in N$),则$\{1-p_{\frac{1}{2}i_k}\}$为递减数列,根据引理 2,存在 $n_0\in N$,使得数列$\{1-p_{\frac{1}{2}i_k}\}$的前 $n_0$项之积小于 $\varepsilon$,这是取

$$B'(n_0)=(((q_{i_1}\vee\neg q_{i_1})\to(q_{i_1}\wedge\neg q_{i_1}))\to(\neg(q_{i_1}\to q_{i_1})))\wedge\cdots\wedge(((q_{i_{n_0}}\vee\neg q_{i_{n_0}})\to(q_{i_{n_0}}\wedge\neg q_{i_{n_0}}))\to(\neg(q_{i_{n_0}}\to q_{i_{n_0}})))$$

当 $q_1,\cdots,q_n$ 全不取$\frac{1}{2}$时, $B(n)=0$,否则 $B(n)=1$,所以 $\tau_{D_{L_3}}(B'(n_0))=1\times(1-p_{\frac{1}{2}i_1})\times\cdots\times(1-p_{\frac{1}{2}i_{n_0}})\neq0$,且

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B'(n_0))\right|=1\times(1-p_{\frac{1}{2}i_1})\times\cdots\times(1-p_{\frac{1}{2}i_{n_0}})<\varepsilon$$

因此 $B=B'(n_0)=(((q_{i_1}\vee\neg q_{i_1})\to(q_{i_1}\wedge\neg q_{i_1}))\to(\neg(q_{i_1}\to q_{i_1})))\wedge\cdots\wedge(((q_{i_{n_0}}\vee\neg q_{i_{n_0}})\to(q_{i_{n_0}}\wedge\neg q_{i_{n_0}}))\to(\neg(q_{i_{n_0}}\to q_{i_{n_0}})))$即为所求。

(2)假设 $\tau_{D_{L_3}}(A)=1$。令

$$B(n)=(((q_1\vee\neg q_1)\to(q_1\wedge\neg q_1))\to(\neg(q_1\to q_1)))\vee\cdots\vee(((q_n\vee\neg q_n)\to(q_n\wedge\neg q_n))\to(\neg(q_n\to q_n)))$$

因为,当 $q_1,\cdots,q_n$ 全部取$\frac{1}{2}$时, $B(n)=0$,否则 $B(n)=1$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(B(n))==1-1\times(p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n})$$

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B(n))\right|=p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n}$$

①如果存在 $n_0$,使得 $p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n_0}<\varepsilon$,则

$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B(n_0))\right|<\varepsilon$。

由 $B(n_0)=(((q_1\vee\neg q_1)\to(q_1\wedge\neg q_1))\to(\neg(q_1\to q_1)))\vee\cdots\vee(((q_n\vee\neg q_n)\to(q_{n_0}\wedge\neg q_{n_0}))\to(\neg(q_{n_0}\to q_{n_0})))$知

$$\tau_{D_{L_3}}(B(n_0))=1-1\times(p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n_0})<0$$

因此 $B=B(n_0)$即为所求。

②如果对任意 $n\in N$，均有 $p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n}\geqslant\varepsilon$,根据引理 1,数列$\{p_{\frac{1}{2}n}\}$有一个递增子列$\{p_{\frac{1}{2}i_k}\}(i\in N,k\in N)$,则$\{1-p_{\frac{1}{2}i_k}\}$为递减数列,根据引理 2,存在 $n_0\in N$,使得数列$\{1-p_{\frac{1}{2}i_k}\}$的前 $n_0$ 项之积小于 $\varepsilon$,这是取

$$B'(n_0)=((q_{i_1}\vee\neg q_{i_1})\to(q_{i_1}\wedge\neg q_{i_1}))\vee\cdots\vee((q_{i_{n_0}}\vee\neg q_{i_{n_0}})\to(q_{i_{n_0}}\wedge\neg q_{i_{n_0}}))$$

因为,当 $q_1,\cdots,q_n$ 全不取$\frac{1}{2}$时,$B'(n_0)=0$,否则 $B'(n_0)=1$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(B'(n_0))=1-1\times(1-p_{\frac{1}{2}i_1})\times\cdots\times(1-p_{\frac{1}{2}i_{n_0}})<1,\text{且}$$

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B'(n_0))\right|=(1-p_{\frac{1}{2}i_1})\times\cdots\times(1-p_{\frac{1}{2}i_{n_0}})<\varepsilon$$

因此 $B=B'(n_0)=((q_{i_1}\vee\neg q_{i_1})\to(q_{i_1}\wedge\neg q_{i_1}))\vee\cdots\vee((q_{i_{n_0}}\vee\neg q_{i_{n_0}})\to(q_{i_{n_0}}\wedge\neg q_{i_{n_0}}))$即为所求。

(3)假设 $0<\tau_{D_{L_3}}(A)<1$,$A$ 中有 $k$ 个原子公式,记 $A=A(q_1,\cdots,q_k)$,这时,取 $m\geqslant k$,令

$$C(n)=((q_{m+1}\vee\neg q_{m+1})\to(q_{m+1}\wedge\neg q_{m+1}))\wedge\cdots\wedge((q_{m+n}\vee\neg q_{m+n})\to(q_{m+n}\wedge\neg q_{m+n})),B=A\vee C(n)$$

则由命题 3 知

$$\tau_{D_{L_3}}(B)=\tau_{D_{L_3}}(A)+\tau_{D_{L_3}}(C)-\tau_{D_{L_3}}(A\wedge C)\leqslant\tau_{D_{L_3}}(A)+\tau_{D_{L_3}}(C)-\tau_{D_{L_3}}(A)\tau_{D_{L_3}}(C)$$

所以 $0\leqslant\tau_{D_{L_3}}(B)-\tau_{D_{L_3}}(A)\leqslant(1-\tau_{D_{L_3}}(A))\tau_{D_{L_3}}(C)$,即

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B)\right|\leqslant(1-\tau_{D_{L_3}}(A))\tau_{D_{L_3}}(C)$$

因为,当 $q_{m+1},\cdots,q_{m+n}$ 全部取$\frac{1}{2}$时,$C(n)=1$,否则 $C(n)=0$,所以

$$T_{D_{L_3}}(C(n))=1\times(p_{\frac{1}{2}(m+1)}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}(m+n)})$$

因此

$$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B)\right|=(1-\tau_{D_{L_3}}(A))\times1\times(p_{\frac{1}{2}(m+1)}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}(m+n)})<p_{\frac{1}{2}(m+1)}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}(m+n)}$$

仿照(1)的方法,可以得到满足条件:$\left|\tau_{D_{L_3}}(A)-\tau_{D_{L_3}}(B)\right|<\varepsilon$,且 $\tau_{D_{L_3}}(B)\neq\tau_{D_{L_3}}(A)$的 $B$。 □

## 4 公式间的 $D_{L_3}$-相似度及 $D_{L_3}$-逻辑度量空间

**定义 9** 设 $D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为(0,1)中的三值随机序列,$A,B\in F(S)$,令

$$\xi_{D_{L_3}}(A,B)=\tau_{D_{L_3}}((A\to B)\wedge(B\to A))$$

称 $\xi_{D_{L_3}}(A,B)$为公式 $A$ 与 $B$ 的 $D_{L_3}$-相似度。

**命题 4** 设 $D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为(0,1)中的三值随机序列,$A,B\in F(S)$,则:

(1)$\xi_{D_{L_3}}(A,B)=\xi_{D_{L_3}}(B,A)$。

(2)$\xi_{D_{L_3}}(A,A)=1$。

如果对任意的赋值 $v$,均有 $v(A)\leqslant v(B)$,则:

(3)$\xi_{D_{L_3}}(A,B)=\tau_{D_{L_3}}(B\to A)$

**证明** (1)、(2)显然成立,下面证明(3)。因为对任意的赋值,均有 $v(A)\leqslant v(B)$,所以 $A\to B=1$,从而$(A\to B)\wedge(B\to A)=B\to A$,因此 $\xi_{D_{L_3}}(A,B)=\tau_{D_{L_3}}(B\to A)$。 □

**定理 3** 设 $D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为(0,1)中的三值随机序列,$A,B,C\in F(S)$,则:

(1)$A\approx B$ 当且仅当 $\xi_{D_{L_3}}(A,B)=1$。

(2)$\xi_{D_{L_3}}(A,B)+\xi_{D_{L_3}}(B,C)\leqslant1+\xi_{D_{L_3}}(A,C)$。

**证明** (1)若 $A\approx B$,则 $A\to B$ 与 $B\to A$ 均为重言式,$(A\to B)\wedge(B\to A)$也是重言式。由定理 1 知 $\xi_{D_{L_3}}(A,B)=1$。

反之,若 $\xi_{D_{L_3}}(A,B)=1$,根据定理 1 知 $(A\to B)\wedge(B\to A)$ 是重言式,故 $A\approx B$。

(2)不妨设 $A,B,C$ 都含有 $n$ 个原子公式 $q_1,\cdots,q_n$,令

$$G_1=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_B(\alpha)=f_C(\alpha)\}$$

$$G_2=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_B(\alpha)\text{且}f_A(\alpha)\neq f_C(\alpha)\}$$

$$G_{21}=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_B(\alpha)\text{且}|f_A(\alpha)-f_C(\alpha)|=\frac{1}{2}\}$$

$G_{21}\subseteq G_2$ 且 $G_{21}$ 还可以表示为

$$G_{21}=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_B(\alpha)\text{且}|f_B(\alpha)-f_C(\alpha)|=\frac{1}{2}\}$$

$$G_3=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_C(\alpha)\text{且}f_A(\alpha)\neq f_B(\alpha)\}$$

$$G_{31}=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_C(\alpha)\text{且}|f_A(\alpha)-f_B(\alpha)|=\frac{1}{2}\}$$

$G_{31}\subseteq G_3$ 且 $G_{31}$ 还可以表示为

$$G_{31}=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)=f_C(\alpha)\text{且}|f_B(\alpha)-f_C(\alpha)|=\frac{1}{2}\}$$

$$G_4=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_B(\alpha)=f_C(\alpha)\text{且}f_A(\alpha)\neq f_B(\alpha)\}$$

$$G_{41}=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_B(\alpha)=f_C(\alpha)\text{且}|f_A(\alpha)-f_B(\alpha)|=\frac{1}{2}\}$$

$G_{41}\subseteq G_4$ 且 $G_{41}$ 还可以表示为

$$G_{41}=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_B(\alpha)=f_C(\alpha)\text{且}|f_A(\alpha)-f_C(\alpha)|=\frac{1}{2}\}$$

$$G_5=\{\alpha\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n|f_A(\alpha)\neq f_B(\alpha)\text{且}$$
$$f_B(\alpha)\neq f_C(\alpha)\text{且}f_A(\alpha)\neq f_C(\alpha)\}$$

显然,$G_1,G_2,G_3,G_4,G_5$ 两两的交集为 $\phi$,$G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup G_5=\{0,\frac{1}{2},1\}^n$。

$$[((A\to B)\wedge(B\to A))_1]=G_1\cup G_2$$

$$[((A\to B)\wedge(B\to A))_{\frac{1}{2}}]\subseteq G_{31}\cup G_{41}\cup G_5$$

$$[((B\to C)\wedge(C\to B))_1]=G_1\cup G_4$$

$$[((B\to C)\wedge(C\to B))_{\frac{1}{2}}]\subseteq G_{21}\cup G_{31}\cup G_5$$

$$[((A\to C)\wedge(C\to A))_1]=G_1\cup G_3$$

$$[((A\to C)\wedge(C\to A))_{\frac{1}{2}}]\supseteq G_{21}\cup G_{41}$$

由定义 8 及定义 9 知:

$$\xi_{D_{L_3}}(A,B)\leqslant 1\times(\mu(G_1)+\mu(G_2))+\frac{1}{2}\times(\mu(G_{31})+\mu(G_{41})+\mu(G_5))$$

$$\xi_{D_{L_3}}(B,C)\leqslant 1\times(\mu(G_1)+\mu(G_4))+\frac{1}{2}\times(\mu(G_{21})+\mu(G_{31})+\mu(G_5))$$

$$\xi_{D_{L_3}}(A,C)\geqslant 1\times(\mu(G_1)+\mu(G_3))+\frac{1}{2}\times(\mu(G_{21})+\mu(G_{41}))$$

$$1=\mu(G_1)+\mu(G_2)+\mu(G_3)+\mu(G_4)+\mu(G_5)$$

$$\xi_{D_{L_3}}(A,B)+\xi_{D_{L_3}}(B,C)\leqslant 2\mu(G_1)+\mu(G_2)+\mu(G_4)+\mu(G_{31})+\mu(G_5)+\frac{1}{2}\mu(G_{21})+\frac{1}{2}\mu(G_{41})=$$
$$(\mu(G_1)+\mu(G_3))+\frac{1}{2}\times(\mu(G_{21})+\mu(G_{41}))+\mu(G_1)+\mu(G_2)+\mu(G_4)+\mu(G_5)+(\mu(G_{31})-\mu(G_3))\leqslant$$
$$\xi_{D_{L_3}}(A,C)+\mu(G_1)+\mu(G_2)+\mu(G_4)+\mu(G_5)+(\mu(G_{31})-\mu(G_3))\leqslant\xi_{D_{L_3}}(A,C)+\mu(G_1)+\mu(G_2)+\mu(G_3)+\mu(G_4)+\mu(G_5)=\xi_{D_{L_3}}(A,C)+1$$

所以 $\xi_{D_{L_3}}(A,B)+\xi_{D_{L_3}}(B,C)\leqslant 1+\xi_{D_{L_3}}(A,C)$。 □

**定义 10** 设 $D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$ 为 $(0,1)$ 中的三值随机序列,$A,B\in F(S)$,令

$$\rho_{D_{L_3}}(A,B),=1-\xi_{D_{L_3}}(A,B)$$

则称 $\rho_{D_{L_3}}(A,B)$ 为 $F(S)$ 上 $D_{L_3}$–的伪距离。称 $\{F(S),\rho_{D_{L_3}}\}$ 为 $D_{L_3}$–逻辑度量空间。

**命题 5** $\rho_{D_{L_3}}:F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 是 $F(S)$ 的伪距离。

**证明** 设 $A,B,C\in F(S)$,则:

(1)由命题 4(2)得,$\rho_{D_{L_3}}(A,A)=1-\xi_{D_{L_3}}(A,A)=0$。

(2)由命题4(1)得,$\rho_{D_{L_3}}(A,B)=1-\xi_{D_{L_3}}(A,B)=1-\xi_{D_{L_3}}(B,A)=\rho_{D_{L_3}}(B,A)$。

(3)由定理3(2)得

$$1-\xi_{D_{L_3}}(A,C)\leqslant 1-\xi_{D_{L_3}}(A,B)+1-\xi_{D_{L_3}}(B,C)$$

所以 $\rho_{D_{L_3}}(A,C)=1-\xi_{D_{L_3}}(A,C)\leqslant 1-\xi_{D_{L_3}}(A,B)+1-\xi_{D_{L_3}}(B,C)=\rho_{D_{L_3}}(A,B)+\rho_{D_{L_3}}(B,C)$。 □

**定理4** 设$\{F(S),\rho_{D_{L_3}}\}$为$D_{L_3}$-逻辑度量空间,则$\{F(S),\rho_{D_{L_3}}\}$中没有孤立点。

**证明** 设$A\in F(S)$,$\varepsilon$是任意给定的正数,下面证明存在$B\in F(S)$,$B\neq A$,使得$\rho_{D_{L_3}}(A,B)<\varepsilon$。

设$A=A(q_1,\cdots,q_k)$,取自然数$m\geqslant k$,令$C=(((q_{m+1}\vee\neg q_{m+1})\to(q_{m+1}\wedge\neg q_{m+1}))\to(\neg\ (q_{m+1}\to q_{m+1})))\vee\cdots\vee(((q_{m+n}\vee\neg q_{m+n})\to(q_{m+n}\wedge\neg q_{m+n}))\to(\neg\ (q_{m+n}\to q_{m+n})))$,$B=A\wedge C$,所以

$$\xi_{D_{L_3}}(A,B)=\tau_{D_{L_3}}((A\wedge C\to A)\wedge(A\to A\wedge C))=$$
$$\tau_{D_{L_3}}(A\to A\wedge C)\geqslant\tau_{D_{L_3}}(C)$$

因为,当$q_{m+1},\cdots,q_{m+n}$全部取$\frac{1}{2}$时,$C=0$,否则$C=1$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(C)=1-1\times(p_{\frac{1}{2}(m+1)}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}(m+n)})$$

因此

$$1-\xi_{D_{L_3}}(A,B)\leqslant 1-\tau_{D_{L_3}}(C)$$
$$\rho_{D_{L_3}}(A,B)\leqslant p_{\frac{1}{2}(m+1)}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}(m+n)}$$

(1)如果存在$n_0$,使得$p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n_0}<\varepsilon$,则

$$\rho_{D_{L_3}}(A,B)<\varepsilon$$

且$B(n_0)=A\wedge(((q_{m+1}\vee\neg q_{m+1})\to(q_{m+1}\wedge\neg q_{m+1}))\to(\neg\ (q_{m+1}\to q_{m+1})))\vee\cdots\vee(((q_{m+n}\vee\neg q_{m+n})\to(q_{m+n}\wedge\neg q_{m+n}))\to(\neg\ (q_{m+n}\to q_{m+n})))$显然与$A$不同,所以$B=B(n_0)$即为所求。

(2)如果对任意$n\in N$,均有$p_{\frac{1}{2}1}\times\cdots\times p_{\frac{1}{2}n_0}\geqslant\varepsilon$根据引理1,数列$\{p_{\frac{1}{2}(m+n)}\}$有一个递增子列$\{p_{\frac{1}{2}(m+i_k)}\}(i\in N,k\in N)$,则$\{1-p_{\frac{1}{2}(m+i_k)}\}$为递减数列,根据引理2,存在$n_0\in N$,使得数列$\{1-p_{\frac{1}{2}(m+i_k)}\}$的前$n_0$项之积小于$\varepsilon$,这是取$C'(n_0)=((q_{m+i_1}\vee\neg q_{m+i_1})\to(q_{m+i_1}\wedge\neg q_{m+i_1}))\vee\cdots\vee((q_{m+i_{n_0}}\vee\neg q_{m+i_{n_0}})\to(q_{m+i_{n_0}}\wedge\neg q_{m+i_{n_0}}))$,因为,当$q_{m+i_1},\cdots,q_{m+i_{n_0}}$全不取$\frac{1}{2}$时,$C'(n_0)=0$,否则$C'(n_0)=1$,所以

$$\tau_{D_{L_3}}(C'(n_0))=1-1\times(1-q_{\frac{1}{2}(m+i_1)})\times\cdots\times(1-q_{\frac{1}{2}(m+i_{n_0})})<1$$

这是取

$$B'(n_0)=((q_{m+i_1}\vee\neg q_{m+i_1})\to(q_{m+i_1}\wedge\neg q_{m+i_1}))\vee$$
$$\cdots\vee((q_{m+i_{n_0}}\vee\neg q_{m+i_{n_0}})\to(q_{m+i_{n_0}}\wedge\neg q_{m+i_{n_0}}))$$

显然与$A$不同,且

$$\rho_{D_{L_3}}(A,B)<(1-q_{\frac{1}{2}(m+i_1)})\times\cdots\times(1-q_{\frac{1}{2}(m+i_{n_0})})<\varepsilon$$

因此$B=B'(n_0)$即为所求。 □

## 5 结束语

本文利用(0,1)中的三值随机数列$D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$的概念,引入了三值逻辑系统$L_3$中的公式的$D_{L_3}$-随机真度概念,证明所有公式的随机真度之集$\{\tau_{D_{L_3}}(A)|A\in F(S)\}$在[0,1]中没有孤立点,这样,在给定三值随机数列$D_0,D_{\frac{1}{2}},D_1$后,所有公式的随机真度的值域为闭区间[0,1],任意一个公式的随机真度的值都可由其他公式的随机真度的值来逼近。定义了两公式间的$D_{L_3}$-相似度与伪距离$\rho_{D_{L_3}}$,建立了$D_{L_3}$-逻辑度量空间,证明了该度量空间中没有孤立点,从而可以在$D_{L_3}$-逻辑度量空间$\{F(S),\rho_{D_{L_3}}\}$中展开近似推理的研究。

**References:**

[1] Adams E W. A primer of probability logic[M]. Stanford: CSL I Pulications, 1998.

[2] Hailperin T. Sentential probability logic[M]. London: Associated University Presses, 1996.

[3] Coletti G, Scozzafava R. Probabilistic logic in a coherent setting[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] Dubois D, Prade H. Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics[J]. Ann Math Artif Intell, 2001, 32: 35-66.

[5] Baioletti M, Capotopti A, Tulipani S, et al. Simplification rules for the coherent probability assessment problem[J]. Ann Math-Artif Intell, 2002, 35: 11-28.

[6] Wang Guojun. Quantitative logic (Ⅰ)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 191-215.

[7] Hui Xiaojing, Wang Guojun. Stochastic study and application in classical reasoning pattern[J]. Science in China: Ser E, 2007, 37(6): 801-812.

## 附中文参考文献:

[6] 王国俊.计量逻辑学(Ⅰ)[J].工程数学学报, 2006, 23(2): 191-215.

[7] 惠小静,王国俊.经典推理模式的随机化研究及其应用[J].中国科学:E 辑,2007,37(6):801-812.

WANG Qingping was born in 1979. He received the B.S. degree from Liaocheng Teacher's University in 2001, and now is a M.S. candidate at Liaocheng University. His research interests include non-classical logic and fuzzy reasoning.

王庆平(1979-),男,山东东平人,助教,硕士研究生,2001 年毕业于聊城师范学院数学与应用数学专业,目前是聊城大学硕士研究生,主要研究领域为非经典逻辑,模糊推理。

ZHANG Xingfang was born in 1957. She received the B.S. degree from Liaocheng Teacher's University in 1981. Her research interests include fuzzy reasoning, fuzzy logic and fuzzy information processing.

张兴芳(1957-),女,山东阳谷人,教授,研究生导师,1981 年毕业于聊城师范学院,主要研究方向为模糊推理,模糊逻辑,模糊信息处理。