第 29 卷第 6 期 温州大学学报·自然科学版 2008 年 12 月
Vol 29, No 6 Journal of Wenzhou University · Natural Sciences Dec, 2008

关于一类广义算子隐向量变分不等式的解

赵佃波，邵明香，何中全

(西华师范大学数学与信息学院，四川南充 637002)

摘 要：在广义算子向量变分不等式的解（GOVVI）的基础上，提出了广义算子隐向量变分不等式的解（GOIVVI），得到解的存在性.

关键词：向量变分不等式；Fan-Browder 不动点定理；广义半连续；C-伪单调算子

中图分类号：O177.52 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2008)06-0007-05

向量变分不等式最早是由F. Giannessi于 1980 年引入到有限维空间中并加以研究的[1]．其后，G. Y. Chen和C. M. Chen在无限维空间中讨论了这一问题[2]．最近十几年来，向量变分不等式问题（VVI）和广义变分不等式问题（GVVI）引起了广泛的关注，它们与向量平衡有着紧密的联系，并且在向量值最优化问题等多方面得到应用[3-7]．最近，A. Domokos和J. Kolumban在Banach空间中讨论了算子向量变分不等式解（OVVI）问题，并通过KKM定理得到了解的存在性[8]. 接着S. Kum和W. K. Kim[9]在集值映射下将其推广，得到了广义算子向量变分不等式解（GOVVI）．本文在此基础上将其推广，得到全新的广义算子隐向量变分不等式解（GOIVVI），用不动点定理得到解的存在性定理.

1 预备知识

设E,F是 Hausdorff 拓扑向量空间，X是E的非空凸子集，$P\subset E$是一个非空子集，如果$P+P\subset P$，$\lambda P\subset P$，$\forall\lambda\geq 0$，则称P是E的一个凸锥.

设$C_1:X\to 2^F$是一个多重函数对$\forall x\in X$．$C_1(x)$是F中的凸锥且$C_1(x)\neq 0$，$C_1(x)\neq F$．$L(X,Y)$是X到Y的所有连续线性算子组成的空间，$T_1:X\to 2^{L(E,F)}$是一个多重函数，$\psi_1:L(E,F)\times X\times X\to F$是一个函数．于是$T_1$被称为：

（I）T_1称为关于ψ_1是广义C-伪单调，如果对任意$x,y\in X$，$\exists\, s\in Tx$，满足：

$$\psi_1(s,x,y)\notin -\operatorname{int}Cx\Rightarrow \forall t\in Ty,\ -\psi_1(t,y,x)\notin -\operatorname{int}Cx$$

（II）T_1称为关于ψ_1是广义半连续的，如果对任意$x,y\in X$和$\alpha\in[0,1]$，映射$\alpha\to\psi_1(T(x+\alpha(y-x)),x,y)$在$0^+$处是上半连续的，其中：

收稿日期：2008-05-06

基金项目：四川省高等教育教学改革工程人才培养质量和教学改革项目([2005]198)

作者简介：赵佃波(1978-)，男，山东日照人，硕士研究生，研究方向：非线性分析

$$\psi_1\left(T\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right),x,y\right)=\left\{\psi_1\left(t,x,y\right)\mid t\in T\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right)\right\}$$

在下面的定义中重点研究广义算子隐向量变分不等式解（GOIVVI）.

设 X' 是 $2^{L(X,Y)}$ 的非空凸子集且 $T:X'\to E$ 是一个多重函数. 设 $C:X'\to 2^F$ 是一个多重函数对 $\forall f\in X'$，$C\left(f\right)$ 是 F 中的一个凸锥且 $0\notin C\left(f\right)$，$\psi:X'\times X'\times E\to F$ 是一个函数.

本文所研究的广义算子隐向量变分不等式解（GOIVVI）定义如下：

找到 $f_0\in X'$ 使 $\forall f\in X'$，$\exists x\in T\left(f_0\right)$ 满足 $\psi\left(f_0,f,x\right)\notin C\left(f_0\right)$.

当 $\psi\left(f_0,f,x\right)=\left\langle\eta\left(f,f_0\right),x\right\rangle$ 时，（GOIVVI）就退化为（GOVVLI）：

找到 $f_0\in X'$ 使 $\forall f\in X'$，$\exists x\in T\left(f_0\right)$ 满足 $\left\langle\eta\left(f,f_0\right),x\right\rangle\notin C\left(f_0\right)$.

当 $\eta\left(f,f_0\right)=f-f_0$ 时，（GOVVLI）就退化为 (GOVVI)：

找到 $f_0\in X'$ 使 $\forall f\in X'$, $\exists x\in T\left(f_0\right)$ 满足 $\left\langle f-f_0,x\right\rangle\notin C\left(f_0\right)$.

当 T 是单值映射时 (GOVVI) 就退化为（OVVI）：

找到 $f_0\in X'$ 使 $\forall f\in X'$，满足 $\left\langle f-f_0,T\left(f_0\right)\right\rangle\notin C\left(f_0\right)$.

由此可见，（GOIVVI）的确是其它几种算子向量变分不等式解的全面推广.

模仿上面 T_1 的单调性和连续性，本文定义 $T:X'\to E$ 如下：

（I）C-伪单调的，如果对任意的 $f,g\in X'$，$\exists\ s\in T\left(f\right)$，满足 $\psi\left(f,g,s\right)\notin C\left(f\right)\Rightarrow-\psi\left(g,f,t\right)\notin C\left(f\right)$ 对 $\forall\ t\in T\left(g\right)$.

（II）广义半连续的，如果对 $\forall f,g\in X'$，$\alpha\in[0,1]$，映射 $\alpha\mapsto\psi\left(f+\alpha\left(g-f\right),g,T\left(f+\alpha\left(g-f\right)\right)\right)$ 在 0^+ 处是上半连续的. 这里 $\psi\left(f+\alpha\left(g-f\right),g,T\left(f+\alpha\left(g-f\right)\right)\right)=\left\{\psi\left(f+\alpha\left(g-f\right),g,s\right)\mid s\in T\left(f+\alpha\left(g-f\right)\right)\right\}$.

定义 1　设 $F:X\to 2^Y$ 是一个多值映射：如果对任意的 $x,y\in X$ 和 $\alpha\in\left[0,1\right]$，有 $\alpha F\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)F\left(y\right)\subset F\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)-P$，其中 P 是 Y 中的一个尖锥，则 F 称为 P- 凸的.

引理 1　设 X 是实 Hausdorff 拓扑向量空间 E 的非空凸子集，K 是 X 的非空紧子集，设 $A,B:X\to X$ 是两个多重函数. 假设

（i）对 $\forall x\in X$，$Ax\subset Bx$；

（ii）对 $\forall x\in X$，Bx 是凸的；

（iii）对 $\forall x\in X$，Ax 是非空的；

（iv）对 $\forall x\in X$，$A^{-1}\mathrm{y}=\left\{\mathrm{x}\in X\mid y\in Ax\right\}$ 在 X 中是开的；

（v）对每个 X 中的有限子集 N，存在 X 中的非空紧凸子集 L_N 使得对 $\forall x\in L_N\setminus K$，$Ax\cap L_N\neq 0$.

于是 B 有不动点 x_0，即 $x_0\subset Bx_0$.

2 广义算子隐向量变分不等式解

在下面所述中，X, X' 通常被假定为是紧的.

定理 1　设 $L(E, F)$ 被赋予依拓扑有界收敛，X' 是其非空紧凸子集．设 $T: X' \to 2^E$ 是多重函数且对所有的 $f \in X'$，$T(f)$ 非空且是紧的．设 $W: X' \to F$，$W(f) = F \setminus C(f)$，W 的图 $G_r(W)$ 在 $X' \times F$ 中是弱闭的.

假设以下条件成立：

（i）T 称为关于 ψ 是广义 $C-$ 伪单调的；

（ii）T 称为关于 ψ 是广义半连续的，并且对任意的 $f \in X'$，$T(f)$ 是紧的；

（iii）对任意的 $f \in X'$，$s \in T(f)$，$\psi(f, \cdot, s)$ 是 $Q-$ 凸的；

（iv）对任意 $f \in X', s \in T(f)$，$\psi(f, \cdot,)$ 是连续的，其中 X' 和 F 都嵌入相应的弱拓扑；

（v）对任意 $s \in T(f)$ 和 $f \in X'$，$\psi(f, f, s) \in Q$；

（vi）任意 $s \in T(f)$，$f, g \in X'$，$\psi(f + t(g - f), g, s) = (1-t)\psi(f, g, s)$，$t \in [0,1]$；

（vii）对每个 X' 中的有限子集 N'，存在 X' 中的非空紧凸子集 $L_{N'}$ 包含 N' 使得对 $\forall f \in L_{N'} \setminus K'$，存在 $g \in L_{N'}$ 满足 $-\psi(g, f, t) \in C(f)$ 对某个 $t \in T(g)$，于是 $(GOIVVI)$ 有解.

证明：首先注明 $L(E,F)$ 被赋予依拓扑有界且是个局部凸空间．本文定义如下两个 $A, B: X' \to X'$ 多重函数：

$$A(f) := \{g \in X' \mid \exists t \in T(g), -\psi(g, f, t) \in C(f)\}$$

$$B(f) := \{g \in X' \mid \forall s \in T(f), \psi(f, g, s) \in C(f)\}$$

证明由如下几步构成：

（i）因为 T 是 C-伪单调的，我们有 $A(f) \subset B(f)$ 对所有 $f \in X'$.

（ii）对每个 $f \in X'$，$B(f)$ 是凸的．事实上，设 $g_1, g_2 \in B(f)$，对所有 $t \in [0,1]$ 和 $s \in T(f)$，我们有 $\psi(f, tg_1 + (1-t)g_2, s) = t\psi(f, g_1, s) + (1-t)\psi(f, g_2, s) \in C(f)$，所以 $tg_1 + (1-t)g_2 \in B(f)$．因此 $B(f)$ 是凸的.

（iii）显然 B 没有不动点．假设有，则存在 $f \in X'$，对任意的 $s \in T(f)$，$\psi(f, f, s) \in C(f)$，但是根据假设条件（v），$\psi(f, f, s) \in C(f) \cap -C(f) = \varnothing$ 矛盾.

（iv）对每个 $g \in X'$，$A^{-1}(g)$ 在 X' 中是开的.

事实上，设 $\{f_\lambda\}$ 是 $\left(A^{-1}(g)\right)^C$ 中收敛到 $f \in X'$ 中的网，则有 $g \notin A(f_\lambda)$，因此对任意 $t_\lambda \in T(g)$，$-\psi(g, f_\lambda, t_\lambda) \notin C(f_\lambda)$．因此 $-\psi(g, f_\lambda, t_\lambda) \in W(f_\lambda)$，对于任意 $t \in T(g)$．因为 $(f_\lambda, -\psi(g, f_\lambda, t_\lambda)) \in G_r(W)$，考虑 $G_r(W)$ 的弱闭性和假设条件（iv），有 $-\psi(g, f, t) \in W(f)$，

即 $-\psi(g,f,t)\notin C(f)$ 对任意的 $t\in T(g)$．因此 $g\notin A(f)$，故 $f\in\left(A^{-1}(g)\right)^C$．这说明 $\left(A^{-1}(g)\right)^C$ 是闭的，因此，$A^{-1}(g)$ 在 X' 中是开的．

（v）由假设知，对每个 X' 中的有限子集 N'，存在 X' 中的非空弱紧凸子集 $L_{N'}$ 包含 N' 使得对 $\forall f\in L_{N'}\setminus K'$，存在 $g\in L_{N'}$ 满足 $g\in A(f)$，因此 $L_{N'}\cap A(f)\neq 0$．

（vi）由假设条件（i）-（v），由引理 1，必存在 $f_0\in K'$ 使得 $A(f_0)=0$，即对

$$\forall g\in X',\ \exists x\in T(g),\ -\psi(g,f_0,t)\notin C(f_0) \tag{1}$$

这时我们说，f_0 就是（GOVVLI）的解．通过反证假设 f_0 不是（GOVVLI）的解．于是存在 $g_o\in X'$ 使得

$$\forall s\in T(f_0)\ ,\ \psi(f_0,g_0,s)\in C(f_0) \tag{2}$$

令 $f_t=f_0+t(g_0-f_0)$，$t\in[0,1]$，因为 X' 是凸的，$f_t\in X'$．对任意 $t\in[0,1]$，通过 $H(t)=\{\psi(f_0,g_0,s)\,|\,s\in T(f_t)\}$ 定义 $H:[0,1]\to 2^F$ 的函数. 于是根据(1)式，$H(0)\in C(f_0)$. 因为 T 关于 ψ 是广义半连续的，因此存在 $\bar{t}\in(0,1]$，使得对所有 $t\in[0,\bar{t})$，$H(t)\subset C(f_0)$．因此存在 $\bar{t}\in(0,1)$，使得对所有 $t\in[0,\bar{t})$，$s\in T(f_t)$，$\psi(f_0,g_0,s)\in C(f)$．固定 $t\in(0,\bar{t})$，根据 $\psi(f_t,\cdot,s)$ 是 Q－凸的，我们有，对任意的 $s\in T(f_t)$，

$$\psi(f_t,f_t,s)=\psi(f_t,f_0+t(g_0-f_0),s)\in t\psi(f_t,g_0,s)+(1-t)\psi(f_t,f_0,s)-Q \tag{3}$$

通过（3）式和假设条件（v），(vi）有：

$$-(1-t)\psi(f_t,f_0,s)\in t\psi(f_t,g_0,s)-\psi(f_t,f_t,s)-Q$$

$$\subset t(1-t)\psi(f_0,g_0,s)-Q-Q\subset C(f_0)$$

因此对任意的 $s\in T(f_t)$，$-\psi(f_t,f_0,s)\in C(f_0)$．这与（1）式矛盾．

证毕．

参考文献

[1] Giannessi F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementarity problems [C] // Cottle R W, Giannessi F, LionsJ L. Variational Inequalities and Complementarity Problems. Chichester: John Wiley and Sons, 1980: 151-186.

[2] Chen G Y, Chen G M. Vector variational inequality and vector optimization [J]. Lecture Notes in Economics and Math System, 1987, 285: 408-416.

[3] 殷洪友，徐成贤．一般多值向量变分不等式问题[J]. 应用数学学报, 2001, 24(2): 285-290.

[4] Chen G Y. Vector Variational Inequality and Its Applications for Multiobjective Optimization [J]. Chinese Sci Bull, 1989, 34: 969-972.

[5] Fan K. Some Properties of Convex Sets Related to Fixed Point Theorems [J]. Math Ann, 1984, 266: 519-537.

[6] Yang X Q. Vector Variational Inequlity and Vector Pseudolinear Optimization [J]. J Optim Theory Appl, 1997, 95:

729-734.

[7] Huang N J, Fang Y P. Fixed Point Theorems and a New System of Multivalued Generalized Order Complementrity Problems [J]. Positivity, 2003, 7: 257-265.

[8] Domokos A, Kolumban J. Variational Inequalities with Operator Solutions [J]. Journal of Global Optimization, 2002, 23: 99-110.

[9] Kum S, Kim W K. Generalized Vector Variational and Quasivatiational Inequalities with Operator Solutions [J]. Journal of Global Optimization, 2005, 32: 581-595.

Solutions of Generalized Operator Implicit Vector Variational Inequalities

ZHAO Dianbo, SHAO Mingxiang, HE Zhongquan

(School of Mathematics and Information, West China Normal University, Nanchong, China 637002)

Abstract: In this paper the authors introduce and study the solutions of generalized operator vector variational inequality under the weak C-pseudomontonicity. We draw the solutions of generalized operator implicit vector variational inequality.

Key words: Vector variational inequality; Fan-Browder fixed point theorem; Generalized hemicontinuity; *C*-pseudomontonicity

（编辑：王一芳）