第 30 卷第 5 期 温州大学学报·自然科学版 2009 年 10 月
Vol 30, No 5 Journal of Wenzhou University · Natural Sciences Oct, 2009

关于广义对称 SOR 方法的收敛性

陆云增，张乃敏

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州 325035）

摘 要：对求解对称线性鞍点问题的广义对称 SOR（successive over-relaxation）方法作了进一步的推广，即把该方法运用于求解非对称线性鞍点问题之中，并给出了其收敛的充要条件.

关键词：广义对称 SOR 方法；收敛性；充要条件

中图分类号：O241.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1674-3563(2009)05-0016-06

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.05.003 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

考虑如下问题的求解：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ q \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中，$A\in R^{m\times m}$ 是正定矩阵，即 $\forall 0\neq x\in R^m$，$x^T Ax>0$，$B\in R^{m\times n}$ 是列满秩矩阵 $(m>n)$.

上述问题通常称为线性鞍点问题，它出现在科学与工程计算的许多领域，如某些流体力学问题的计算以及约束优化问题的计算等[1]．此类问题的求解一直是国内外学者关注的热点问题之一．最近，ZHANG Goufeng[2]在对称 SOR 方法的基础上提出了广义对称 SOR 算法，但是他仅讨论了 A 对称正定时的情形．本文将讨论更一般的情形，即 A 不限制为对称阵，同时对文献[1]的收敛性条件试作进一步的修正.

1 广义对称 SOR 方法

将线性方程组（1）改写为：

$$\overline{A}\mathrm{X}\equiv\begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ -q \end{pmatrix}, \tag{2}$$

对于线性方程组（2）的系数矩阵，作如下分裂：

$$\overline{A}\equiv\begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}=D-A_L-A_U, \tag{3}$$

其中，$D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，$A_L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$，$A_U=\begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & Q \end{pmatrix}$．这里 Q 为某个 $n\times n$ 阶的对称正定矩阵.

收稿日期：2008-12-02

基金项目：浙江省自然科学基金（y606009）

作者简介：陆云增（1979- ），男，山东临沂人，硕士研究生：大型稀疏矩阵计算

令 $L=D^{-1}A_L=\begin{pmatrix}0&0\\Q^{-1}B^T&0\end{pmatrix}$，$U=D^{-1}A_U=\begin{pmatrix}0&-A^{-1}B\\0&I\end{pmatrix}$，则线性方程组（2）可化为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(L+U)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+D^{-1}\begin{pmatrix}b\\-q\end{pmatrix}. \tag{4}$$

令 $\Omega=\begin{pmatrix}\omega I_m&0\\0&\tau I_n\end{pmatrix}(\tau\neq1)$，$c=\begin{pmatrix}b\\-q\end{pmatrix}$，$z^{(k)}=\begin{pmatrix}x^{(k)}\\y^{(k)}\end{pmatrix}$是广义对称 SOR 方法的第 k 步近似解，则 $z^{(k+1)}$ 按如下格式计算[2]：

$$z^{(k+1)}=H_\Omega z^{(k)}+M_\Omega, \tag{5}$$

其中，

$$H_\Omega=I-(I-\Omega U)^{-1}(2I-\Omega)(I-\Omega L)^{-1}D^{-1}\overline{A}, \tag{6}$$

$$M_\Omega=(I-\Omega U)^{-1}(2I-\Omega)(I-\Omega L)^{-1}D^{-1}\Omega c. \tag{7}$$

另外，

$$H_\Omega=I-(I-\Omega U)^{-1}(2I-\Omega)(I-\Omega L)^{-1}D^{-1}\overline{A}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-\omega)^2I-\dfrac{\omega\tau(1-\omega)(2-\tau)}{1-\tau}A^{-1}BQ^{-1}B^T & \left[(\omega-2)\omega I+\dfrac{\omega^2\tau(2-\tau)}{1-\tau}A^{-1}BQ^{-1}B^T\right]A^{-1}B\\ \dfrac{\tau(2-\tau)(1-\omega)}{1-\tau}Q^{-1}B^T & I-\dfrac{\omega\tau(2-\tau)}{1-\tau}Q^{-1}B^TA^{-1}B\end{pmatrix}, \tag{8}$$

由此不难发现，当 ω=1 时，迭代矩阵 H_Ω 可以简化为：

$$H_\Omega=\begin{pmatrix}0&\left[-I+\dfrac{\tau(2-\tau)}{1-\tau}A^{-1}BQ^{-1}B^T\right]A^{-1}B\\0&I-\dfrac{\tau(2-\tau)}{1-\tau}Q^{-1}B^TA^{-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-A^{-1}B\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\0&I-\dfrac{\tau(2-\tau)}{1-\tau}Q^{-1}B^TA^{-1}B\end{pmatrix}, \tag{9}$$

所以 $rank(H_\Omega)\le n$，此时迭代矩阵的非零特征值至多有 n 个.

2 广义对称 SOR 方法的收敛性分析

引理 1　若对于 $\forall\lambda\in\sigma(H_\Omega)$ 且 $\lambda\neq1$，$\lambda\neq(\omega-1)^2$，μ 满足：

$$\left[\lambda-(\omega-1)^2\right](\lambda-1)(1-\tau)=\omega\tau(\omega-2)(2-\tau)\lambda\mu, \tag{10}$$

则 μ 是矩阵 $Q^{-1}B^TA^{-1}B$ 的特征根. 反之，若对于 $\forall\mu\in\sigma(Q^{-1}B^TA^{-1}B)$ 且 λ 满足（10），则 λ 是矩阵 H_Ω 的特征根.

证明：设 $\lambda\in\sigma(H_\Omega)$，即 $H_\Omega Y=\lambda Y$，其中 $Y=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\neq0$，$\xi\in R^m$，$\eta\in R^n$，即

$$\left[I-\left(I-\Omega U\right)^{-1}(2I-\Omega)\left(I-\Omega L\right)^{-1}\Omega D^{-1}\overline{A}\right]\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)\left(I-\Omega U\right)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(2I-\Omega)(I-\Omega L)^{-1}\Omega D^{-1}\overline{A}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)\begin{pmatrix}I & \omega A^{-1}B\\ 0 & (1-\tau)I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega(2-\omega)I & (2-\omega)\omega A^{-1}B\\ (\omega-1)(2-\tau)\tau Q^{-1}B^T & (2-\tau)\omega\tau Q^{-1}B^T A^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-\lambda)\xi+(1-\lambda)\omega A^{-1}B\eta=\omega(2-\omega)\xi+(2-\omega)\omega A^{-1}B\eta & (11)\\ (1-\lambda)(1-\tau)\eta=(\omega-1)(2-\tau)\tau Q^{-1}B^T\xi+(2-\tau)\omega\tau Q^{-1}B^T A^{-1}B\eta & (12)\end{cases}.$$

所以$\lambda\neq1$且$\lambda\neq(\omega-1)^2$，由（11）得：

$$\xi=\frac{\omega(1-\omega+\lambda)}{(\omega-1)^2-\lambda}A^{-1}B\eta\ . \qquad (13)$$

将（13）代入（12）得：

$$\left\{\left[(\omega+1)^2-\lambda\right](2-\tau)\omega\tau+\omega\tau(\omega-1)(2-\tau)(1-\omega+\lambda)\right\}Q^{-1}B^TA^{-1}B\eta=(1-\lambda)(1-\tau)\left[(\omega-1)^2-\lambda\right]\eta\ ,$$

即

$$\omega\tau(\omega-2)(2-\tau)\lambda Q^{-1}B^TA^{-1}B\eta=\left[\lambda-(\omega-1)^2\right](\lambda-1)(1-\tau)\eta\ .$$

由（13）知$\eta\neq0$，否则$y=0$．再由$\lambda\neq1$，$\tau\neq1$，$\lambda\neq(\omega-1)^2$知：

$$(1-\lambda)(1-\tau)\left[(\omega-1)^2-\lambda\right]\eta\neq0\ ,$$

即满足（10）的μ为$Q^{-1}B^TA^{-1}B$的特征根.

下面证明 1 引理的第二部分.

设$\mu\in\sigma(Q^{-1}B^TA^{-1}B)$，即$Q^{-1}B^TA^{-1}B\eta=\mu\eta$，令$\xi=A^{-1}B\eta$，则有$Q^{-1}B^T\xi=\mu\eta$.

对满足（10）的λ，取$Y=\begin{pmatrix}m\xi\\ n\eta\end{pmatrix}$，其中：

$$m=\omega(\omega-2)+\omega^2\frac{\tau(2-\tau)}{1-\tau},$$

$$n=\lambda-\left[(1-\omega)^2-\omega(1-\omega)\frac{\tau(2-\tau)}{1-\tau}\mu\right],$$

即

$$\begin{cases}m\left[(1-\omega)^2-\omega(1-\omega)\dfrac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\right]+n\left[\omega(\omega-2)+\omega^2\dfrac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\right]=\lambda m\\ m(1-\omega)\dfrac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu+n\left(1-\omega\dfrac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\right)=\lambda n\end{cases},$$

$$H_\Omega Y=\begin{pmatrix}(1-\omega)^2 I-\frac{\omega\tau(1-\omega)(2-\tau)}{1-\tau}A^{-1}BQ^{-1}B^T & \left[(\omega-2)\omega I+\frac{\omega^2\tau(2-\tau)}{1-\tau}A^{-1}BQ^{-1}B^T\right]A^{-1}B \\ \frac{\tau(2-\tau)(1-\omega)}{1-\tau}Q^{-1}B^T & I-\frac{\omega\tau(2-\tau)}{1-\tau}Q^{-1}B^TA^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\xi\\ n\eta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}m\left[(1-\omega)^2-\omega(1-\omega)\frac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\right]\xi+n\left[\omega(\omega-2)+\omega^2\frac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\right]\xi \\ m(1-\omega)\frac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\eta+n\left(1-\omega\frac{\tau(2-\tau)}{\tau-1}\mu\right)\eta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}m\xi\\ n\eta\end{pmatrix},$$

所以 $Y=\begin{pmatrix}m\xi\\ n\eta\end{pmatrix}$ 为矩阵 H_Ω 的特征向量，λ 为其相应的特征根，即 λ 满足（10），则 $\lambda\in H_\Omega$.

证毕.

注意：由上述证明的第二部分可知，若 $\lambda=0$，则有 $\omega=1$，结合前面（9）所述，可知当 $\omega=1$ 时，迭代矩阵至少有 m 个零特征根，这说明 $\omega=1$ 迭代收敛速度会加快.

为了给出迭代收敛的充要条件，下面再给出几个引理.

引理 2[3] 将 A 分解为对称部分 H_1 和反对称部分 H_2 之和，即 $A=H_1+H_2$，则

$$\lambda_{\min}(H_1)\le \operatorname{Re}\lambda(A)\le\lambda_{\max}(H_1),$$

其中，$H_1=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$，$H_2=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$.

引理 3 若矩阵 A 正定，则 $\operatorname{Re}\lambda(A)>0$.

证明：因为矩阵 A 正定，所以 $\forall x\ne 0$，有 $x^TAx=x^TA^Tx>0$，$x^T(A+A^T)x>0$，所以矩阵 $A+A^T$ 是对称正定矩阵．由引理 2 知，$\operatorname{Re}\lambda(A)\ge\frac{1}{2}\lambda_{\min}(A+A^T)>0$.

引理 4 若 Q 对称正定，A 正定且 B 是列满秩矩阵，则 $\operatorname{Re}\lambda(Q^{-1}B^TA^{-1}B)>0$.

证明：因为 Q 对称正定，所以 Q^{-1} 对称正定，所以存在可逆矩阵 C，使得 $Q^{-1}=CC^T$，$Q^{-1}B^TA^{-1}B=CC^TB^TA^{-1}BCC^{-1}$，于是有矩阵 $Q^{-1}B^TA^{-1}B$ 相似于矩阵 $C^TB^TA^{-1}BC$．又因为 A 正定，A^{-1} 正定，对于 $\forall x\in R^n$ 且 $x\ne 0$，由于是 B 列满秩的，C 是可逆的，所以有 $BCx\ne 0$，$x^TC^TB^TA^{-1}BCx>0$，矩阵 $C^TB^TA^{-1}BC$ 正定．由引理 3 知，$\operatorname{Re}\lambda(C^TB^TA^{-1}BC)>0$，又因为相似变换不改变矩阵的特征根，故 $\operatorname{Re}\lambda(Q^{-1}B^TA^{-1}B)>0$.

引理 5[4] 对于一元二次方程 $x^2-dx+c=0$，则方程的根满足：

$$\left|x_{1,2}\right|<1\Leftrightarrow\left|d-\bar{d}c\right|<1-|c|^2,$$

其中 $\bar{d}$ 为 d 的共轭复数.

下面给出广义对称 SOR 方法收敛的充要条件．在文[2]中，作者只给出了当 A 是对称正定阵时收敛的充分条件，本文将 A 推广到不对称情形并给出其收敛的充要条件.

定理 1 设 $A\in R^{m\times m}$ 是正定矩阵，$Q\in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵，$B\in R^{n\times m}$ 是列满秩矩阵，且

$\mu \in \sigma(Q^{-1}B^{T}A^{-1}B)$，则广义对称 SOR 方法收敛的充要条件为：

$$0<\omega<2,\ 0<\tau<\frac{2+l-\sqrt{l^2+4}}{2}\ \text{或}\ 1<\tau<\frac{2+l+\sqrt{l^2+4}}{2},$$

其中 $l=\min\dfrac{\left[1-(w-1)^4\right](\mu+\overline{\mu})}{\left|\mu-(\omega-1)^2\overline{\mu}\right|}$.

证明：广义对称 SOR 方法迭代收敛的充要条件为 $\rho(H_{\Omega})<1$[5]，即 $|\lambda|<1$ $(\lambda\in\sigma(H_{\Omega}))$，由引理 1 可知，$\lambda$ 满足（10），即 λ 满足：

$$\lambda^2-\left[1+(\omega-1)^2+\frac{\omega(\omega-2)\tau(\tau-2)}{\tau-1}\mu\right]\lambda+(\omega-1)^2=0 \quad ,$$

其中 $\mu\in\sigma(Q^{-1}B^{T}A^{-1}B)$.

令 $a\equiv(\omega-1)^2\ge 0$，$b\equiv\dfrac{\omega(\omega-2)\tau(\tau-2)}{\tau-1}$，则由引理 5 知：

$$|\lambda|<1\Leftrightarrow\left|1+a+b\mu-(1+a+b\overline{\mu})a\right|<1-a^2\Leftrightarrow\left|1-a^2+b(\mu-a\overline{\mu})\right|<1-a^2 \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow\left[1-a^2+b(\mu-a\overline{\mu})\right]\left[1-a^2+b(\overline{\mu}-a\mu)\right]<(1-a^2)^2$$

$$\Leftrightarrow b(1-a)^2(1+a)(\mu+\overline{\mu})+b^2\left|\mu-a\overline{\mu}\right|^2<0 \quad . \tag{15}$$

由（14）知，$1-a^2>0$，即 $0<\omega<2$. 又由引理 4 知，$\mu+\overline{\mu}>0$，且 $(1-a)^2>0$，$1+a>a>0$，$b^2\left|\mu-a\overline{\mu}\right|^2\ge 0$，所以（15）式成立的充要条件为：

$$\begin{cases} b<0 \\ (1-a)^2(1+a)(\mu+\overline{\mu})+b\left|\mu-a\overline{\mu}\right|^2>0 \\ 0<\omega<2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0<\omega<2 \\ 0>b>-\dfrac{(1-a)(1-a^2)(\mu+\overline{\mu})}{\left|\mu-a\overline{\mu}\right|^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 0<\omega<2 \\ 0<\dfrac{\tau(\tau-2)}{\tau-1}<\dfrac{(1-a^2)(\mu+\overline{\mu})}{\left|\mu-a\overline{\mu}\right|^2}=\dfrac{\left[1-(\omega-1)^4\right](\mu+\overline{\mu})}{\left|\mu-(\omega-1)^2\overline{\mu}\right|^2} \end{cases}.$$

注意：当 $0<\omega<2$ 时，有 $0\le a<1$，此时 $\left|\mu-a\overline{\mu}\right|^2$ 恒不为零. 所以上式等价于

$$\begin{cases} 0<\omega<2 \\ 0<\dfrac{\tau(\tau-2)}{\tau-1}<\min\dfrac{\left[1-(\omega-1)^4\right](\mu+\overline{\mu})}{\left|\mu-(\omega-1)^2\overline{\mu}\right|^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<\omega<2 \\ 2<\tau<\dfrac{2+l+\sqrt{l^2+4}}{2} \text{或} 0<\tau<\dfrac{2+l-\sqrt{l^2+4}}{2} \end{cases},$$

其中，$l \equiv \min \dfrac{\left[1-(\omega-1)^4\right]\left(\mu+\bar{\mu}\right)}{\left|\mu-(\omega-1)^2\bar{\mu}\right|^2}$，$\mu \in \sigma\left(Q^{-1}B^T A^{-1}B\right)$，$\omega \in (1,2)$.

参考文献

[1] Benzi M, Golub G, Liesen J. Numerical Solution of Saddle Point Problems [J]. Acta Numerica, 2005, 14: 1-137.

[2] Zhang G F. On Generalized Symmetric SOR Method for Augmented Systems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 219(1): 51-58.

[3] 曹志浩. 变分迭代法[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 6.

[4] 冯果忱, 于庚蒲, 郃继福. 矩阵迭代分析导论[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1991: 112.

[5] 曹志浩. 数值线性代数[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1996: 80.

Study on the Convergence of Generalized Symmetric SOR Method

LU Yunzeng, ZHANG Naimin

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: The generalized symmetric SOR (successive over-relaxation) method for solving the symmetric linear saddle point problem was further studied in this paper. The method could be used to solve asymmetric linear saddle point problem. And the sufficient and necessary condition of the convergence of this method was also provided.

Key words: Generalized Symmetric SOR Method; Convergence; Sufficient and Necessary Condition

（编辑：王一芳）