

带时滞的 Watt 型食饵-捕食系统的定性分析

刁鼎力

(温州大学数学与信息科学学院, 浙江温州 325035)

摘要: 研究一类具有时滞的 Watt 型食饵-捕食系统, 讨论了该系统在正平衡点处的稳定性, 证明了该系统在特定的时滞参量值下将产生 Hopf 分岔. 数值模拟结果表明, 结论是可信的.

关键词: 食饵-捕食系统; 时滞; Watt 型; 正平衡点; Hopf 分岔

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-3563(2009)04-0038-06

DOI: 10.3875/j.issn.1674-3563.2009.04.007 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

食饵-捕食系统是生物动力学研究的重要课题之一. 一类比较重要的 Watt 型食饵-捕食系统如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)(r - kx(t)) - ay(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= by(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}} \right) - dy(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示种群中食饵和捕食者在 t 时刻的密度, 所有参数均为正常数, r 为食饵的内禀增长率, a 为单位时间内食饵能被捕食者捕获的最大数量, b 为捕食者的转化率, d 为捕食者的死亡率. 系统中 Watt 型的含义在文献[1]中有所介绍, 模型进一步的生物学背景可参阅文献[2]等. 另外, 带时滞的具功能反应函数的食饵-捕食系统也是一个研究热点, 时滞因素的引入常会对系统的动态性质产生影响, 例如, 在某些特定的时滞值下, 系统会失稳, 产生分岔乃至混沌等现象. 本文将考虑 Watt 型食饵-捕食系统 (1) 在具有时滞因素下的稳定性情况.

带时滞的 Watt 型食饵-捕食系统如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)(r - kx(t - \tau)) - ay(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}} \right), \\ \frac{dy}{dt} &= by(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}} \right) - dy(t) \end{aligned} \quad (2)$$

系统 (2) 具有如下初始条件:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \phi(\theta), \quad y(\theta) = \varphi(\theta), \quad \phi(\theta) \geq 0, \\ \phi(\theta) &\geq 0, \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad \phi(0) > 0, \quad \varphi(0) > 0. \end{aligned}$$

收稿日期: 2008-10-20

作者简介: 刁鼎力(1981-), 山东即墨人, 硕士研究生, 研究方向: 常微分方程

其中, $(\phi(\theta), \varphi(\theta)) \in C([- \tau, 0], R_{+0}^2)$ 是将区间 $[- \tau, 0]$ 映射到 $R_{+0}^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ 上的 Banach 空间的连续函数.

1 系统的平衡点分析

对系统简单分析易见, 当 $d \geq b$ 时, $y(t)$ 趋向于零, 这说明系统 (1) 是灭绝的. 所以下文讨论时均假设 $d < b$, 并设 $\gamma = -\frac{c}{\ln\left(1 - \frac{d}{b}\right)}$.

当 $\gamma < \frac{br}{ad}$ 时, 系统 (1) 的正平衡点是下面代数方程组

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x(t)(r - kx(t)) - ay(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}}\right) = 0 \\ G(x, y) &= by(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}}\right) - dy(t) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

的正解, 亦即曲线

$$\begin{aligned} y &= -\frac{kb}{ad}x^2 + \frac{br}{ad}x := f(x) \\ y &= r^{\frac{1}{m}}x^{\frac{1}{m}} := g(x) \end{aligned} \quad (4)$$

在第一象限的交点坐标^[3]. 由初等计算, 易得为:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{br - \gamma ad}{kd}, \gamma x^*\right). \quad (5)$$

我们知道, 这同时也是系统 (2) 的平衡点. 考虑到系统具有的生物学意义, 下面将只讨论带系统 (2) 在第一象限正平衡点处的稳定性.

如上所知, 系统 (2) 具有平衡点:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{br - \gamma ad}{kd}, \gamma x^*\right) \left(\gamma = -\frac{c}{\ln\left(1 - \frac{d}{b}\right)}\right).$$

当 $d < b$ 且 $\gamma < \frac{br}{ad}$ 时, 设有如下运算式:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= x(t)(r - kx(t - \tau)) - ay(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}}\right) \\ f^{(2)} &= by(t) \left(1 - e^{-\frac{cx(t)}{y(t)}}\right) - dy(t) \end{aligned}, \quad (6)$$

$$p_1 = r - kx^* - ac \left(1 - \frac{d}{b}\right), \quad p_2 = -\frac{ad}{b} + \frac{ac(b-d)}{r^b},$$

$$p_3 = bc - cd, \quad p_4 = \frac{dc - bc}{r}, \quad p_5 = -kx^*.$$

在 (x^*, y^*) 点处对其线性化, 可得到:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_1 x(t) + p_2 y(t) + p_5 x(t - \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= p_3 x(t) + p_4 y(t) \end{aligned} \quad (7)$$

由此知, 系统 (7) 在正平衡点 (x^*, y^*) 处的特征方程为:

$$\lambda^2 - (p_1 + p_4)\lambda - p_5(\lambda - p_4)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (8)$$

下面将讨论这个特征方程以分析系统在平衡点 (x^*, y^*) 处的稳定性. 在此首先引入文献[4]的一个结果:

定理1^[4] 考虑以下多项式:

$$\begin{aligned} p(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m}) &= \lambda^n + p_1^{(0)}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(0)}\lambda + p_n^{(0)} + \\ &\quad \left[p_1^{(1)}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(1)}\lambda + p_n^{(1)} \right] e^{-\lambda\tau_1} + \dots + \left[p_1^{(m)}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(m)}\lambda + p_n^{(m)} \right] e^{-\lambda\tau_m} \end{aligned}$$

其中, $\tau_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$ 且 $p_j^{(i)} (i=0, 1, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 为常数. 随着 $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ 变化, 多项式 $p(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})$ 的零点的阶数亦将发生变化, 当且仅当一个零点产生或穿越虚轴.

同时, 我们知道, 当特征方程的所有根都具有负实部时, 系统 (2) 的平衡点是渐近稳定的, 当特征方程至少具有一个正实部的特征根时, 系统 (2) 的平衡点是不稳定的. 本文依此结果对特征方程 (8) 的根的分布情况进行分析, 得出一个结论.

假设 $i\omega (\omega > 0)$ 是特征方程 (8) 的一个根, 那么, 将其代入得到:

$$-\omega^2 - i(p_1 + p_4)\omega - p_5(i\omega - p_4)e^{-i\omega\tau} = 0, \quad (9)$$

分离方程的实部与虚部得:

$$\begin{aligned} -\omega^2 &= p_5\omega \sin \omega\tau - p_4 p_5 \cos \omega\tau \\ -(p_1 + p_4)\omega &= p_5 \cos \omega\tau + p_4 p_5 \sin \omega\tau \end{aligned} \quad (10)$$

对这个方程作进一步的处理, 得到:

$$\omega^4 + \left[(p_1 + p_4)^2 - p_5^2 \right] \omega^2 - p_4^2 p_5^2 = 0. \quad (11)$$

这个方程具有唯一的正实根, 计算可得:

$$\omega_0 = \left[\frac{1}{2} \left(\left(p_5^2 - (p_1 + p_4)^2 \right) + \sqrt{\left(p_5^2 - (p_1 + p_4)^2 \right)^2 + 4p_4^2 p_5^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

结合 (10), (12) 式, 定义:

$$\tau_j = \frac{1}{\omega_0} \left(\arcsin \frac{-\omega_0 (\omega_0^2 + (p_1 + p_4) p_4)}{p_5 (p_4^2 + \omega_0^2)} + 2j\pi \right), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

那么, (τ, ω_0) 便为方程的解. 它意味着当 $\tau = \tau_j$ 时, 特征方程 (8) 具有一对纯虚数根 $\pm \omega_0 i$.

现在来分析特征方程 (8) 的根在 τ_j 周围的动力学行为.

我们定义

$$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau) \quad (14)$$

为特征方程 (8) 的一般形式的根, 且有:

$$\alpha(\tau_j) = 0, \quad \omega(\tau_j) = 0.$$

将 (11) 代入特征方程 (8), 并对方程的两边作关于自变量 τ 的导数运算, 得到:

$$\left(\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{(2\lambda - (p_1 + p_4))e^{\lambda\tau} - p_5}{-p_5\lambda(\lambda - p_4)} + \frac{\tau}{\lambda}. \quad (15)$$

考虑方程 (9) 和 (11), 得到:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau=\tau_j} = \frac{\omega_0^2}{p_5^2 \omega_0^4 + p_4^2 p_5^2 \omega_0^2} \sqrt{\left(p_5^2 - (p_1 + p_4)^2 \right)^2 + 4p_4^2 p_5^2}, \quad (16)$$

因此有:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right\} &= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau=\tau_j} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\omega_0^2}{p_5^2 \omega_0^4 + p_4^2 p_5^2 \omega_0^2} \sqrt{\left(p_5^2 - (p_1 + p_4)^2 \right)^2 + 4p_4^2 p_5^2} \right\} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

方程 (17) 说明: 当自变量 τ 在 τ_j 点周围增大时, 特征方程的根将自左向右穿越虚轴, 且当 $\tau = 0$ 时特征方程具有含负实部的根, 当且仅当 $p_1 + p_4 + p_5 < 0$, $p_4 p_5 > 0$.

2 系统的Hopf分岔

由以上所述结合定理1, 有以下关于带时滞的Watt型食饵-捕食系统 (2) 在其正平衡点 (x^*, y^*) 处的分岔结论.

定理2 设 $b < d$, $\gamma < \frac{br}{ad}$, 且 $p_1 + p_4 + p_5 < 0$, $p_4 p_5 > 0$. 假设 ω_0 和 τ_j ($j = 0, 1, \dots$) 分别为在 (12) 和 (13) 中定义的, 则

1) 系统 (2) 的正平衡点 (x^*, y^*) , 对于 $\tau \in [0, \tau_0)$, 是渐近稳定的, 对于 $\tau > \tau_0$, 是不稳定的.

2) 系统 (2) 在正平衡点 (x^*, y^*) 处, 当时滞量 τ 经过分岔点 $\tau = \tau_j$ ($j = 0, 1, \dots$) 时将产生 Hopf 分岔.

3 数值模拟

考虑一组参数值: $a=0.5$, $b=2.5$, $c=1$, $d=1.2$, $k=1$, $r=0.8$, 利用前面的(5), (6), (12)式计算得:

$$\tau_0=1.4749, (x^*, y^*)=(1.2990, 1.9864).$$

经由MATLAB软件运算与绘图处理, 得到带时滞的watt型食饵-捕食系统(2)在时滞 $\tau=1.1$ 和 $\tau=1.9$ 处的数值模拟结果. 见图1.

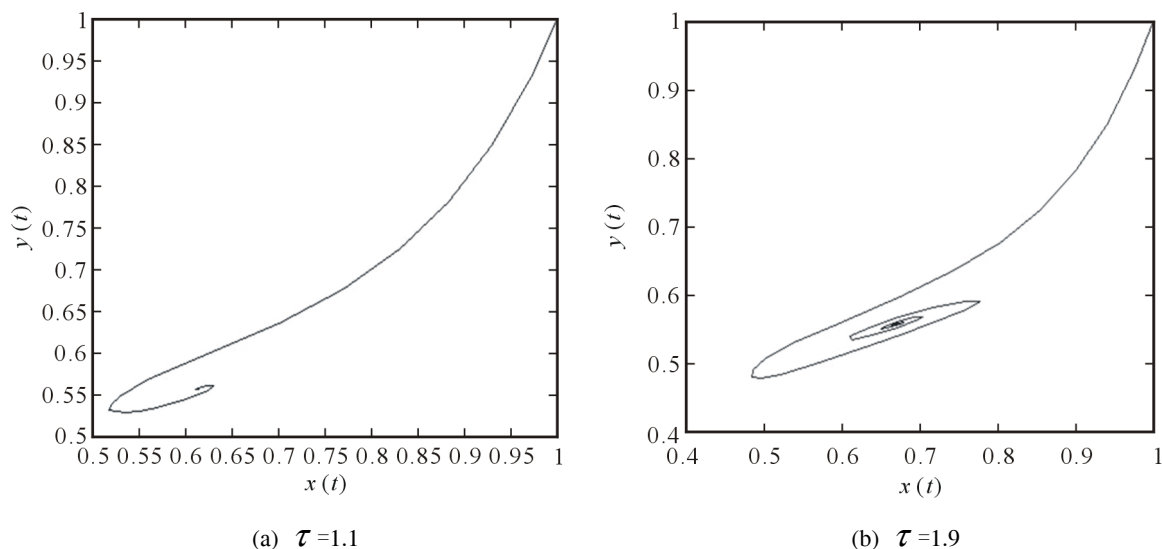


图1 系统(2)的相图

Fig 1 Phase Portrait of System (2)

4 结 语

本文对带时滞的Watt型食饵-捕食系统的稳定性情况进行了分析, 对其在分岔点 $\tau_j (j=0, 1, \dots)$ 处产生的Hopf分岔, 还可以做进一步的讨论, 这需要进行更深入的平衡点定量分析.

参考文献

- [1] Watt K E F. A mathematical model for the effect of densities of attacked and attacking species on the number attacked [J]. Canadian Entomologist, 1959, 91: 129-144.
- [2] Wang W M, Wang X Q, Lin Y Z., Complicated dynamics of a predator-prey system with Watt-type functional response and impulsive control strategy [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37(5): 1427- 1441.
- [3] 王旭. 一类具有Watt型功能性反应的捕食者-食饵系统的研究[DB/OL]. [2005-07-07]. <http://10.96.1.16/kns50/detail.aspx?QueryID=16&CurRec=1>.
- [4] Ruan S, Wei J. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems: Mathematical Analysis, 2003, 10A: 863-874.

Qualitative Analysis of a Watt-type Predator-prey System with Time Delay

DIAO Dingli

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: A Watt-type predator-prey system with time delay was studied. The system's stability at the positive equilibrium had been analyzed by means of qualitative analysis method. The existence of Hopf bifurcation at some certain time delays of the system had been testified. Numerical simulation results showed that the conclusion is reliable.

Key words: Predator-prey System; Time Delay; Watt-type; Positive Equilibrium; Hopf Bifurcation

(编辑: 王一芳)