第 29 卷第 2 期　　温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版　　2008 年 4 月
Vol 29, No 2　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Apr, 2008

Abel 和对有界变差函数及ω-型单调函数的逼近

叶秀芳[1]，杨闻善[2]

（1．温州大学瓯江学院，浙江温州　325035；2．浙江师范大学数理学院，浙江金华　321004）

摘　要：研究了 Abel 和对有界变差函数及其共轭函数的逼近，其逼近结果用有界变差函数的局部全变差来刻画；并由 Abel 和对有界变差函数及其共轭函数的逼近结果推出了 Abel 和对 Lip$\alpha(0\prec\alpha\le 1)$ 函数类的逼近阶，同时又得出了 Abel 和对ω-型单调函数及其共轭函数的逼近估计；另外也指出了俞国华文中的错误之处.

关键词：Abel 和；有界变差函数；ω-型单调函数；逼近

中图分类号：O174　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2008)02-0001-07

1 预备知识

设$C[-\pi,\pi]$是周期为 2π 的$[-\pi,\pi]$上的实连续函数空间，对于 $f\in C[-\pi,\pi]$，其 Fourier 级数记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{1}$$

它的共轭级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)\tag{2}$$

如果（2）是函数$g(x)$的 Fourier 级数，那么就说$g(x)$是$f(x)$的共轭函数，并记$g(x)=\overline{f}(x)$.

（1）式的 Abel 和是：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n,(0\prec r\prec 1),$$

记为$f(r,x)$，其积分表示为

$$f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt.$$

（2）式的 Abel 和是：

收稿日期：2007-10-15

基金项目：温州师范学院 2003 年度科学研究基金(2003Y24)

作者简介：叶秀芳（1975-），女，浙江平阳人，讲师，硕士，研究方向：函数逼近论

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n,(0\prec r\prec 1),$$

记为 $\overline{f}(r,x)$，其积分表示为

$$\overline{f}(r,x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x-t)\right]\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}dt.$$

关于 $f(r,x)$ 逼近 $f(x)$ 的偏差，I. P. Natanson 曾证明了如下定理：

定理 1[1]　设 $0\prec\alpha\le 1$，则

$$A_n^a:=\sup_{f\in Lip\alpha}\left\|f(r,x)-f(x)\right\|_{C_{2\pi}}=\begin{cases}(1-r)^{\alpha}\sec\dfrac{\pi\alpha}{2}+O(1-r), & 0\prec\alpha\prec 1,\\ \dfrac{2(1-r)}{\pi}\left|\log(1-r)\right|+O(1-r), & \alpha=1.\end{cases}$$

有关三角多项式算子对有界变差函数和 ω-型单调函数的逼近问题的研究结果主要有：

定理 2[2]　若 $f\in BV[-\pi,\pi]$，则

$$\left|S_n(f,x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]\right|\le\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_x),$$

其中 $g_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)$.

定理 3[3]　若 $f\in BV[-\pi,\pi]$，则

$$\left|\overline{S}_n(f,x)-\overline{f}(x,\frac{\pi}{n})\right|\le\frac{3.3}{n}\sum_{k=1}^{n}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x),$$

其中 $\varphi_x(t)=\dfrac{1}{2}[f(x+t)-f(x-t)]$.

定理 4[4]　若 $f\in C[-\pi,\pi]\cap M^{\omega}\left[-\pi,\pi\right]$，则

$$\left.\begin{matrix}S_n(f,x)-f(x)\\ \overline{S}_n(f,x)-\overline{f}(x)\end{matrix}\right\}=O(n^{-1})\sum_{k=1}^{n}\left[\omega(f,\frac{\pi}{k})+\omega(\frac{\pi}{k})\right].$$

2 定义和定理及证明

定义 1[4]　设 I 是实直线 R 上的一个区间，f 定义在 I 上，$\omega(t)$ 是某个连续模，若存在某个常数 C 使得 $F(x)=f(x)+C\omega(|x|)\operatorname{sgn}x$ 是 I 上的单调函数，则称 f 是 I 上的 ω-型单调函数，记为 $f\in M^{\omega}I$；当 $\omega(t)=t^{\alpha}\left(0\prec\alpha\le 1\right)$ 时，将 $M^{\omega}I$ 特记为 $M^{\alpha}I$，并称 $M^{\alpha}I$ 中的函数 f 为 I 上的 α-型单调函数.

文献[4]在证明 M^1I 是 $M^{\alpha}I$ $\left(0\prec\alpha\prec 1\right)$ 真子集的过程中指出：函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in\left[-\pi,\pi\right]/0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$\left[-\pi,\pi\right]$上不是 1-型单调函数，但它是$\frac{1}{2}$-型单调函数．事实上，这个函数也不是$\frac{1}{2}$-型单调函数．现证明如下：

假设$f(x)$在$\left[-\pi,\pi\right]$上是$\frac{1}{2}$-型单调函数，则存在常数 C 使得$F(x)=f(x)+C\left|x\right|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x$在$\left[-\pi,\pi\right]$上单调，不妨认为$F(x)$为递增，此时$C\succ 0$，即对$\forall x\in\left[-\pi,\pi\right]$都有$F^{'}(x)\geq 0$．由$F^{'}(x)\geq 0$可算出$C\geq\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x}$，而事实上，我们只要取$\frac{1}{x}=k\pi,k\in z,$ 当$k\to\infty$时，$|\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x}|\to\infty$，所以不存在常数 C 使得$F(x)$在$\left[-\pi,\pi\right]$上递增.

当然，函数$f\notin M^{1}I$，但$f\in M^{\alpha}I\ \left(0\prec\alpha\prec 1\right)$是存在的，如函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}\sin\frac{1}{x}, & x\in\left[-\pi,\pi\right]/0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$\left[-\pi,\pi\right]$上不是 1-型单调函数，但它是$\frac{1}{3}$-型单调函数.

定理 5　若$f\in BV[-\pi,\pi]$，则

$$\left|f(r,x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]\right|\leq\frac{1}{r\left[\left(1-r\right)^{-1}\right]}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_{x}),$$

其中$g_{x}(t)=f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)$，$\left[\left(1-r\right)^{-1}\right]$表示$\left(1-r\right)^{-1}$的整数部分.

证明：

$$\begin{aligned}f(r,x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g_{x}\left(t\right)\frac{1-r^{2}}{2\left(1-2r\cos t+r^{2}\right)}dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{(1-r)\pi}g_{x}\left(t\right)\frac{1-r^{2}}{2\left(1-2r\cos t+r^{2}\right)}dt+\frac{1}{\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}g_{x}\left(t\right)\frac{1-r^{2}}{2\left(1-2r\cos t+r^{2}\right)}dt\\&=:I_{1}+I_{2}\end{aligned}\tag{3}$$

因为

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{2(1-2r\cos t+r^{2})}dt=\frac{1}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|I_{1}\right|&\leq\frac{1}{\pi}\int_{0}^{(1-r)\pi}\left|g_{x}\left(t\right)\right|\frac{1-r^{2}}{2(1-2r\cos t+r^{2})}dt\leq\frac{1}{\pi}\int_{0}^{(1-r)\pi}\overset{t}{\underset{0}{V}}\left(g_{x}\right)\frac{1-r^{2}}{2(1-2r\cos t+r^{2})}dt\\&\leq\frac{1}{2}\overset{(1-r)\pi}{\underset{0}{V}}\left(g_{x}\right)\leq\frac{1}{2\left[\left(1-r\right)^{-1}\right]}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}\left(g_{x}\right)\end{aligned}\tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
\left|I_2\right| &\le \frac{1}{\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\left|g_x(t)\right|\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt \le \frac{1}{\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\overset{t}{\underset{0}{V}}(g_x)\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\overset{t}{\underset{0}{V}}(g_x)\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}dt \le \frac{(1-r^2)\pi}{8r}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\frac{\overset{t}{\underset{0}{V}}(g_x)}{t^2}dt \qquad (5)\\
&\le \frac{1-r}{4r}\int_{1}^{(1-r)^{-1}}\overset{\frac{\pi}{t}}{\underset{0}{V}}(g_x)dt \le \frac{1-r}{4r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\int_k^{k+1}\overset{\frac{\pi}{t}}{\underset{0}{V}}(g_x)dt \le \frac{1-r}{4r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_x)
\end{aligned}
$$

将（4）和（5）代入（3），得

$$
\begin{aligned}
\left|f(r,x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]\right| &\le \left[\frac{1}{2\left[(1-r)^{-1}\right]}+\frac{1-r}{4r}\right]\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_x) \\
&\le \left[\frac{1}{2\left[(1-r)^{-1}\right]}+\frac{1}{4r\left[(1-r)^{-1}\right]}\right]\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_x) \le \frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_x)
\end{aligned},
$$

利用定理 5 的结果，不难得出：

推论　若 $f \in Lip\alpha, 0 \prec \alpha \le 1$，则

$$
\left|f(r,x)-f(x)\right| = \begin{cases} O\left[\dfrac{(1-r)^{\alpha}}{r(1-\alpha)}\right], & 0 \prec \alpha \prec 1, \\ O\left[\dfrac{(1-r)}{r}\left|\log(1-r)\right|\right], & \alpha = 1. \end{cases}
$$

可见，根据定理 5 得出的 Abel 和对 $f \in Lip\alpha(0 \prec \alpha \le 1)$ 函数类的逼近阶与 I P Natanson 证明的结果是一致的.

定理 6　若 $f \in BV[-\pi,\pi]$，则

$$
\left|\overline{f}(r,x)-\overline{f}(x)\right| \le \frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+2)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x),
$$

其中 $\varphi_x(t)=\dfrac{1}{2}[f(x+t)-f(x-t)]$，$\left[(1-r)^{-1}\right]$ 表示 $(1-r)^{-1}$ 的整数部分.

证明：

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(r,x)-\overline{f}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}\right]dt \qquad (6)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^{(1-r)\pi}\varphi_x(t)\frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{2\left(1-2r\cos t+r^2\right)}dt+\frac{1}{\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{2\left(1-2r\cos t+r^2\right)}dt
$$

$$
=: I_1+I_2
$$

由于

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt=\frac{1}{2}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{(1-r)\pi}|\varphi_x(t)|\frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt \le \frac{1}{\pi}\int_0^{(1-r)\pi}\mathop{V}_0^t(\varphi_x)\frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt \\
&= \frac{1-r}{2(1+r)}\mathop{V}_0^{(1-r)\pi}(\varphi_x) \le \frac{1-r}{2(1+r)\left[(1-r)^{-1}\right]}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\mathop{V}_0^{\frac{\pi}{k}}(\varphi_x) \qquad (7) \\
&\le \frac{1}{2(1+r)\left[(1-r)^{-1}\right]^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\mathop{V}_0^{\frac{\pi}{k}}(\varphi_x) \le \frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\mathop{V}_0^{\frac{\pi}{k}}(\varphi_x)
\end{aligned}
$$

令

$$
\lambda(t)=\left|\int_t^{\pi}\frac{\cos\frac{\mu}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\mu}{2}}d\mu\right|
$$

利用积分第二中值定理，对$0\prec t\le\pi$,有$\xi\in[t,\pi]$使得

$$
\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{1}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}\left|\int_t^{\xi}\cos\frac{\mu}{2}d\mu\right| = \frac{1}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}\left|2\sin\frac{\mu}{2}\right|_t^{\xi} \\
&\le \frac{4}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{1}{r\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{\pi^2}{rt^2}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}dt\right| \\
&\le \frac{(1-r)^2}{2\pi}\left|\varphi_x\left[(1-r)\pi\right]\lambda\left[(1-r)\pi\right]\right| + \frac{(1-r)^2}{2\pi}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}|\lambda(t)||d\varphi_x(t)| \\
&\le \frac{1}{2\pi r}\left|\varphi_x\left[(1-r)\pi\right]\right| + \frac{(1-r)^2\pi}{2r}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\frac{|d\varphi_x(t)|}{t^2}
\end{aligned}
$$

$$\le \frac{1}{2\pi r}\overset{(1-r)\pi}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)+\frac{(1-r)^2\pi}{2r}\left[\frac{\overset{t}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)}{t^2}\right]_{(1-r)\pi}^{\pi}+\frac{(1-r)^2\pi}{r}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\frac{\overset{t}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)}{t^3}dt$$

$$=\frac{(1-r)^2}{2\pi r}\overset{\pi}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)+\frac{(1-r)^2\pi}{r}\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\frac{\overset{t}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)}{t^3}dt$$

其中

$$\int_{(1-r)\pi}^{\pi}\frac{\overset{t}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)}{t^3}dt=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{(1-r)^{-1}}t\overset{\frac{\pi}{t}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)dt\le\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\int_k^{k+1}t\overset{\frac{\pi}{t}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)dt$$

$$\le\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+1)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)$$

所以

$$\begin{aligned}|I_2|&\le\frac{(1-r)^2}{2\pi r}\overset{\pi}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)+\frac{(1-r)^2}{\pi r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+1)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)\\&\le\frac{(1-r)^2}{2\pi r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)+\frac{(1-r)^2}{\pi r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+1)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)\\&\le\frac{5(1-r)^2}{4\pi r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+1)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)\le\frac{(1-r)^2}{r}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+1)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)\\&\le\frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+1)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x)\end{aligned}\tag{8}$$

将（7）和（8）代入（6），得

$$\left|\overline{f}(r,x)-\overline{f}(x)\right|\le\frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]^2}\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+2)\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(\varphi_x).$$

根据定理 6 的结果，不难得出：$\overline{f}(r,x)$ 对共轭函数类 $Lip\alpha(0\prec\alpha\le1)$ 逼近时，其逼近阶能一致达到$O\left[\frac{(1-r)^\alpha}{r}\right]$.

由定理 5、定理 6 和文[4]证得$\overset{\frac{\pi}{k}}{\underset{0}{V}}(g_x)\le2\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)+4C\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)$的结果，便可推出以下两个定理：

定理 7　若 $f\in C_{2\pi}[-\pi,\pi]\cap M^{\omega}[-\pi,\pi]$，则

$$\left|f(r,x)-f(x)\right|=O\left[\frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]}\right]\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}\left[\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)+\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)\right]$$

关于 x 一致成立.

定理 8　若 $f\in C_{2\pi}[-\pi,\pi]\cap M^{\omega}[-\pi,\pi]$，则

$$\left|\overline{f}(r,x)-\overline{f}(x)\right|=O\left[\frac{1}{r\left[(1-r)^{-1}\right]^{2}}\right]\sum_{k=1}^{\left[(1-r)^{-1}\right]}(k+2)\left[\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)+\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)\right]$$

关于 x 一致成立.

参考文献

[1] 谢庭潘，周颂平. 实函数逼近论[M]. 杭州：杭州大学出版社, 1998: 102-104.

[2] Bojanic R. An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation [J]. Publ Inst Math, 1979, 26: 57-60.

[3] Mazhar S M, AL-Budaiwi A. An estimate of the rate of convergence of the conjugate Fourier series of functions of bounded variation [J]. Acta Math Hungar, 1987, 49: 377-380.

[4] 俞国华. Fourier 级数部分和对 ω-型单调函数的逼近[J]. 高等学校应用数学学报: A 辑, 2002, 17(1): 149-154.

On Approximation of the Abel Sums for Bounded Variation Functions and ω-type Monotonic Functions

YE Xiufang[1], YANG Wenshan[2]

(1. OuJiang School, Wenzhou University, Wenzhou, China　325035; 2. School of Mathematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua, China　321004)

Abstract: This paper studies the approximation of the Abel sums for bounded variation functions and their conjugate functions and describes the result of approximation by local total variation of bounded variation functions. Then the paper puts out the approximation estimates of the Abel sums for the Lip $\alpha(0\prec\alpha\leq 1)$ functions and the ω-type monotonic functions by the result of the approximation. It also points out the mistake in the paper of Yu Guohua that was published in “Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A” in the year 2002.

Key words: Abel sum; Bounded variation function; ω-type monotonic function; Approximation

（编辑：王一芳）