Fock 空间上对偶 Toeplitz 算子的紧性

叶　鹏，于　涛，吴时月

（浙江师范大学数理与信息工程学院，浙江金华　321004）

摘　要：讨论 Fock 空间上以平方可积函数为符号的对偶 Toeplitz 算子，并给出其有界性与紧性的等价判别条件.

关键词：Gaussian 测度；Fock 空间；对偶 Toeplitz 算子；Hankel 算子

中图分类号：O177.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2008)01-0026-06

记 C 为复平面，D 为 C 中单位开圆盘，C 上的 Gaussian 测度 μ 定义为 $d\mu(z)=\exp\left\{\frac{-|z|^2}{2}\right\}\frac{dV(z)}{2\pi}$，其中 V 为 C 上的 Lebesgue 测度，称 $L_a^2(C,d\mu)=L^2(C,d\mu)\cap H(C)$ 为 C 上的 Fock 空间，又称为 Seagal-Bargmann 空间，其中 $H(C)$ 为 C 上的解析函数全体.

近些年来，由于现代分析、量子力学、偏微分方程等需要，人们对 Fock 空间上的函数理论及其算子理论越来越感兴趣. 文献[1-4]分别研究了 Fock 空间上的 Toeplitz 算子和 Hankel 算子的有界性、紧性及相关性质.

相对于 Fock 空间，对经典 Hardy 空间及 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的研究更受国内外学者的关注. 1964 年，Brown 和 Halmos[5]证明了经典 Hardy 空间上不存在非零紧 Toeplitz 算子. 1998 年，Axler 和 Zheng[6]完全刻画了 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的紧性：Toeplitz 算子的有限乘积的有限和是紧的，当且仅当它的 Berezin 变换在边界上趋于零，即存在非零的紧 Toeplitz 算子. Stroethoff 和 Zheng[7]于 2002 年证明了单圆盘 Bergman 空间上的对偶 Toeplitz 算子是紧的，当且仅当其符号函数在单位圆盘几乎处处为零.

本文在复平面 Fock 空间上讨论对偶 Toeplitz 算子的有界性与紧性，并得到类似的结果.

1 预备知识

设 P 为 $L^2(C)$ 到 $L_a^2(C)$ 上的正交投影，对 $\forall h\in L^2(C)$，P 可表示为：

$$(Ph)(z)=\int_C h(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}d\mu(\lambda),\quad \forall z\in C$$

其中 $K_z(\lambda)=\exp\frac{\langle\lambda,z\rangle}{2}$ 称为 $L_a^2(C)$ 上的 Fock 再生核[1].

对 $f\in L^\infty(C)$，Toeplitz 算子 $T_f:L_a^2(C)\to L_a^2(C)$ 定义为：

收稿日期：2007-04-16

作者简介：叶鹏（1976-），男，浙江温州人，硕士研究生，研究方向：算子代数

$$T_f(g)=P(fg),\qquad g\in L_a^2(C)$$

记$Q=I-P$，$L^2(C)=L_a^2(C)\oplus L_a^2(C)^{\perp}$，则 Hankle 算子$H_f: f\in L^2(C)\to L_a^2(C)^{\perp}$定义为：

$$H_f(g)=Q(fg)=(I-P)(fg),\qquad g\in L_a^2(C)$$

对偶 Toeplitz 算子$S_f: L_a^2(C)^{\perp}\to L_a^2(C)^{\perp}$定义为：

$$S_f(u)=Q(fu)=(I-P)(fu),\qquad u\in L_a^2(C)^{\perp}$$

当$f\in L^2(C)$时，对$\forall u\in L_a^2(C)^{\perp}\cap L^{\infty}(C)$，$S_f(u)=Q(fu)\in L_a^2(C)^{\perp}$，由此知$S_f$在$L^{\infty}(C)$上稠定义．易知对$\forall u\in L_a^2(C)^{\perp}$，有：

$$H_{\bar f}^{*}u(z)=\int_C f(\lambda)u(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}d\mu(\lambda)\tag{1}$$

当$f\in L^{\infty}(C)$，乘法算子$M_f: L^2(C)\to L^2(C)$定义为：

$$M_f(u)=fu,\quad u\in L^2(C)$$

当$f\in L^2(C)$时，对$\forall u\in L^2(C)\cap L^{\infty}(C)$，$M_f(u)=fu\in L^2(C)$，由此知$M_f$在$L^{\infty}(C)$上稠定义．易检验当$\forall u\in L_a^2(C)^{\perp}\cap L^{\infty}(C)$时有：

$$M_f u=S_f u+H_{\bar f}^{*}u,\qquad S_f u\perp H_{\bar f}^{*}u\tag{2}$$

当$f,g\in L^{\infty}(C)$，Fock 空间上的 Toeplitz 算子、Hankel 算子和对偶 Toeplitz 算子有如下代数关系：

$$T_{fg}=T_fT_g+H_{\bar f}^{*}H_g,\quad S_{fg}=S_fS_g+H_fH_{\bar g}^{*}\tag{3}$$

2 主要结果

对 $\forall w\in C$及$0<s<1$，定义函数$g_{w,s}$及$u_{w,s}$ 如下：

$$g_{w,s}(\lambda)=\overline{(\lambda-w)}\exp\left\{\frac{|\lambda|^2}{2}\right\}\chi_{w+sD}(\lambda),\quad u_{w,s}(\lambda)=g_{w,s}(\lambda)/\|g_{w,s}\|_2$$

其中χ_{w+sD}为$w+sD$上的特征函数．

引理 1　对任意的$w\in C$，$u_{w,s}\in L_a^2(C)^{\perp}$．

证明：只要证$g_{w,s}\in L_a^2(C)^{\perp}$即可．事实上，对$\forall n\ge 0$，有：

$$\begin{aligned}\int_C \lambda^n\overline{g_{w,s}(\lambda)}d\mu(\lambda)&=\int_{w+sD}\lambda^n(\lambda-w)\exp\left\{\frac{|\lambda|^2}{2}\right\}d\mu(\lambda)\\&=\int_{w+sD}\lambda^n(\lambda-w)\frac{dV(\lambda)}{2\pi}\\&=\int_{sD}(\lambda+w)^n\lambda\frac{dV(\lambda)}{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$

此即 $g_{w,s}\perp z^n$；而 $\left\{z^n:n\geq 0\right\}$ 为 $L_a^2\left(C\right)$ 的一组基，从而有 $g_{w,s}\in L_a^2\left(C\right)^{\perp}$．证毕.

引理 2　设 $f\in L^2\left(C\right)$，则对 $\forall w\in C$，有 $\lim\limits_{s\to 0^+}\left\|H_{\bar{f}}^{*}u_{w,s}\right\|_2=0$.

证明：对 $w\in C$，由（1）知，$\forall z\in C$，

$$\begin{aligned}\left|H_{\bar{f}}^{*}u_{w,s}(z)\right|&=\left|\int_C f(\lambda)u_{w,s}(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}d\mu(\lambda)\right|\\&\leq\int_{w+sD}\left|f(\lambda)u_{w,s}(\lambda)K_z(\lambda)\right|d\mu(\lambda)\\&\leq\left\|u_{w,s}\right\|_2\left(\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2\left|K_z(\lambda)\right|^2d\mu(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2\left|K_z(\lambda)\right|^2d\mu(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\left\|H_{\bar{f}}^{*}u_{w,s}\right\|_2^2&\leq\int_C d\mu(z)\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2\left|K_z(\lambda)\right|^2d\mu(\lambda)\\&=\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2\left(\int_C\left|K_z(\lambda)\right|^2d\mu(z)\right)d\mu(\lambda)\\&=\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2\exp\left\{\frac{\left|\lambda\right|^2}{2}\right\}d\mu(\lambda)\\&\leq\exp\left\{\frac{\left(s+|w|\right)^2}{2}\right\}\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2d\mu(\lambda)\\&\leq\exp\left\{\frac{\left(1+|w|\right)^2}{2}\right\}\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2d\mu(\lambda)\end{aligned}$$

由 $f\in L^2\left(C\right)$，可得 $\int_{w+sD}\left|f(\lambda)\right|^2d\mu(\lambda)\to 0\left(s\to 0^+\right)$，即得出结论.

引理 3　设 $f\in L^2\left(C\right)$，则对 a.e.$w\in C$，有 $\left|f(w)\right|=\lim\limits_{s\to 0^+}\left\|S_f u_{w,s}\right\|_2$.

证明：对任意的 $w\in C$，由 $L_a^2\left(C,d\mu\right)=L^2\left(C,d\mu\right)\cap H\left(C\right)$，故根据（2）知：

$$M_f u_{w,s}=S_f u_{w,s}+H_{\bar{f}}^{*}u_{w,s},\qquad S_f u_{w,s}\perp H_{\bar{f}}^{*}u_{w,s}$$

于是 $\left\|M_f u_{w,s}\right\|_2^2=\left\|S_f u_{w,s}\right\|_2^2+\left\|H_{\bar{f}}^{*}u_{w,s}\right\|_2^2$．由引理 2，即得对 $\forall w\in C$，有：

$$\lim_{s\to 0^+}\left\|M_f u_{w,s}\right\|_2^2=\lim_{s\to 0^+}\left\|S_f u_{w,s}\right\|_2^2$$

所以为证结论只须证得对 a.e.$w\in C$，有下述等式即可：

$$\lim_{s\to 0^+}\left\|M_f u_{w,s}\right\|_2^2=\lim_{s\to 0^+}\frac{\int_{|\lambda-w|<s}\left|f(\lambda)\right|^2\left|\lambda-w\right|^2\exp\left\{|\lambda|^2\right\}d\mu(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}\left|\lambda-w\right|^2\exp\left\{|\lambda|^2\right\}d\mu(\lambda)}=\left|f(w)\right|^2$$

事实上，令 $B(w,s)=\left\{\lambda\in C:\left|\lambda-w\right|<s\right\}$，并注意到 $0<s<1$，则有下列不等式：

$$\mu\big(B(w,s)\big)=\int_{|\lambda-w|<s}d\mu(\lambda)=\int_{|\lambda-w|<s}\exp\left\{\frac{-|\lambda|^2}{2}\right\}\frac{dV(\lambda)}{2\pi}$$

$$\le\exp\left\{\frac{-\left(s-|w|\right)^2}{2}\right\}\int_{|\lambda-w|<s}\frac{dV(\lambda)}{2\pi}$$

$$=\exp\left\{\frac{-\left(s-|w|\right)^2}{2}\right\}\frac{s^2}{2}$$

$$\le\frac{2e^{2|w|}}{s^2}\exp\left\{\frac{-\left(s+|w|\right)^2}{2}\right\}\frac{s^4}{4}$$

$$\le\frac{2e^{2|w|}}{s^2}\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\,d\mu(\lambda)$$

最后一个不等号是由于

$$\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2d\mu(\lambda)=\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\left\{\frac{-|\lambda|^2}{2}\right\}\frac{dV(\lambda)}{2\pi}$$

$$\ge\exp\left\{\frac{-\left(s+|w|\right)^2}{2}\right\}\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\frac{dV(\lambda)}{2\pi}$$

$$=\exp\left\{\frac{-\left(s+|w|\right)^2}{2}\right\}\frac{s^4}{4}$$

从而有：

$$\left|\frac{\int_{|\lambda-w|<s}|f(\lambda)|^2|\lambda-w|^2\exp\left\{|\lambda|^2\right\}d\mu(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\left\{|\lambda|^2\right\}d\mu(\lambda)}-|f(w)|^2\right|$$

$$=\left|\frac{\int_{|\lambda-w|<s}\left(|f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right)|\lambda-w|^2\exp\left\{|\lambda|^2\right\}d\mu(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\left\{|\lambda|^2\right\}d\mu(\lambda)}\right|$$

$$\le\frac{s^2\cdot\exp\left\{\left(s+|w|\right)^2\right\}\int_{|\lambda-w|<s}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|d\mu(\lambda)}{\exp\left\{\left(s-|w|\right)^2\right\}\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2d\mu(\lambda)}$$

$$=\frac{s^2\cdot e^{4s|w|}\int_{|\lambda-w|<s}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|d\mu(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2d\mu(\lambda)}$$

$$\le \frac{s^2 \cdot e^{4s|w|}\int_{|\lambda-w|<s}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|d\mu(\lambda)}{\frac{s^2}{2e^{2|w|}}\mu(B(w,s))}$$

$$=\frac{2e^{(4s+2)|w|}}{\mu(B(w,s))}\int_{B(w,s)}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|d\mu(\lambda)$$

$$\le \frac{2e^{6|w|}}{\mu(B(w,s))}\int_{B(w,s)}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|d\mu(\lambda).$$

最后令 $A=\left\{w\in C:\lim\limits_{s\to0^+}\frac{1}{\mu(B(w,s))}\int_{B(w,s)}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|d\mu(\lambda)=0\right\}$，由文献[8]中定理 8.8 易知 A^c 为 Lebesgue 零测集．从而引理得证．

定理 1　如果 $f\in L^2(C)$，则 S_f 有界当且仅当 $f\in L^\infty(C)$，此时 $\|S_f\|=\|f\|_\infty$．

证明：充分性　若 $f\in L^\infty(C)$，则 S_f 有界，且 $\|S_f\|\le\|f\|_\infty<\infty$．

必要性　设 S_f 有界，则对任意的 $w\in C$ 及 $0<s<1$，有 $\|S_f u_{w,s}\|_2\le\|S_f\|$．再由引理 3，即得对 a.e.$w\in C$，有 $|f(w)|\le\|S_f\|$，亦即 $\|f\|_\infty\le\|S_f\|$．从而定理得证．

引理 4　对 $\forall w\in C$，当 $s\to0^+$ 时，$u_{w,s}$ 在 $L_a^2(C)^\perp$ 中弱收敛到 0．

证明：当 $w\in C$，对 $\forall\varphi\in L_a^2(C)^\perp$，有：

$$\left|\langle u_{w,s},\varphi\rangle\right|\le\int_{w+sD}\left|u_{w,s}(\lambda)\varphi(\lambda)\right|d\mu(\lambda)$$

$$\le\|u_{w,s}\|_2\left(\int_{w+sD}|\varphi(\lambda)|^2d\mu(\lambda)\right)^{\frac12}$$

$$=\left(\int_{w+sD}|\varphi(\lambda)|^2d\mu(\lambda)\right)^{\frac12}$$

由 $\varphi\in L^2(C)$，可得 $\left(\int_{w+sD}|\varphi(\lambda)|^2d\mu(\lambda)\right)^{\frac12}\to0(s\to0^+)$．于是 $\langle u_{w,s},\varphi\rangle\to0(s\to0^+)$，引理得证．

定理 2　如果 $f\in L^\infty(C)$，则 S_f 为紧算子当且仅当 $\|f\|_\infty=0$．

证明：充分性　显然．

必要性　由引理 4 知当 $s\to0^+$ 时，$u_{w,s}$ 在 $L_a^2(C)^\perp$ 中弱收敛到 0，又由 S_f 紧，知对 $\forall w\in C$，有 $\|S_f u_{w,s}\|_2\to0\ (s\to0^+)$．再由引理 3，即得对 a.e.$w\in C$，$f(w)=0$，亦即 $\|f\|_\infty=0$．证毕．

定理 3　设 $f,g\in L^\infty(C)$，若 $S_fS_g-S_h$ 为紧算子，则对 a.e.$w\in C$，有 $f(w)g(w)=h(w)$，且 $H_fH_g^*$ 为紧算子．

证明：由（3）式知：

$$S_{fg-h}-H_fH_{\bar{g}}^*=S_{fg}-S_h-H_fH_{\bar{g}}^*=\left(S_fS_g+H_fH_{\bar{g}}^*\right)-S_h-H_fH_{\bar{g}}^*=S_fS_g-S_h$$

因此 $S_{fg-h}-H_fH_{\bar{g}}^*$ 为紧算子．又由引理 4 知对 $\forall w\in C$，当 $s\to 0^+$ 时，$u_{w,s}$ 在 $L_a^2\left(C\right)^{\perp}$ 中弱收敛到 0，所以 $\left\|\left(S_{fg-h}-H_fH_{\bar{g}}^*\right)u_{w,s}\right\|_2\to 0\left(s\to 0^+\right)$．又根据引理 4 可知 $\left\|H_fH_{\bar{g}}^*u_{w,s}\right\|_2\to 0$，于是 $\left\|S_{fg-h}u_{w,s}\right\|_2\to 0$．而根据引理 3 可知，对 a.e.$w\in C$，$\left\|S_{fg-h}u_{w,s}\right\|_2\to\left|f\left(w\right)g\left(w\right)-h\left(w\right)\right|$．从而有对 a.e.$w\in C$，$f\left(w\right)g\left(w\right)-h\left(w\right)=0$．于是 $S_{fg-h}=0$，$H_fH_{\bar{g}}^*$ 紧．定理得证．

参考文献

[1] Janson S, Peetre J, Rochberg R. Hankle forms and the Fock space [J]. Rev Mat Iberoamericana, 1987, 3: 61-138.

[2] Guillemin V. Toeplitz operators in n-dimensions [J]. Integr Equat Oper Th, 1984, 7: 145-205.

[3] Berger C A, Coburn L A. Toeplitz opertors on the Segal-Bargmann Space [J]. Trans Amer Math Soc, 1987, 301: 813-829.

[4] Stroethoff K. Hankel and Toeplitz operators on the Fock space [J]. Michigan Math J, 1992, 39: 3-16.

[5] Brown A, Halmos P R. Algebraic properties of Toeplitz operators [J]. J Reine Angew Math, 1964, 213: 89-102.

[6] Axler S, Zheng D C. Compact operators via Berezin transform [J]. Indiana Univ Math J, 1998, 47: 387-400.

[7] Stroethoff K, Dechao Zheng. Algebraic and spectral properties of dual Toeplitz operators [J]. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 2495-2520.

[8] Rudin W. Real and Complex Analysis [M]. 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1974: 187.

The Compactness of Dual Toeplitz Operators on the Fock Space

YE Peng, YU Tao, WU Shiyue

(College of Mathematics, Physics and Information Engineering,

Zhejiang Normal University, Jinhua, China 321004)

Abstract: This paper deals with the dual Toeplitz operators with square-integrable symbols, and explores some necessary and sufficient conditions for the boundedness and the compactness of the operators.

Key words: Gaussian measure; Fock space; Dual Toeplitz operator; Hankel operator

（编辑：王一芳）