第 30 卷第 4 期　　温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版　　2009 年 8 月
Vol 30, No 4　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Aug, 2009

Poisson 型元件串并联系统和并串联系统的可靠性置信下限

陈威玲，郑海鹰

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：运用 Poisson 分布的累积函数与不完全伽玛函数之间的关系，给出了 Poisson 型元件组成的串并联系统和并串联系统的可靠性表达式，然后根据 Poisson 型元件的样本数据求出未知参数的 Fiducial 分布，进而得到这两种系统可靠性 Fiducial 置信下限的计算公式，最后通过数值模拟验证了结论.

关键词：Poisson 分布；可靠性；串并联系统；并串联系统；Fiducial 置信下限

中图分类号：TB114.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)04-0049-06

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.04.009　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

Poisson 分布是寿命分布中一种重要的离散型分布，范大茵等[1]讨论了由 Poisson 型元件组成的冷贮备系统的可靠性 Fiducial 置信下限，LIU Ye 等[2]给出了 Poisson 分布参数的无偏估计，刘银萍等[3]利用 Lessen 不等式和 Slutsky 定理，讨论了Ⅱ型截尾情形下 Poisson 分布参数的极大似然估计问题．串并联系统和并串联系统在现代可靠性理论中应用相当广泛，讨论其可靠性置信下限有实际意义，文献[4]利用试验数据推导了由成败型元件组成的串并联系统和并串联系统的可靠性近似解．本文将对由寿命服从 Poisson 分布的元件组成的串并联系统和并串联系统的可靠性及其 Fiducial 置信下限进行研究.

1 串并联系统的可靠性

设某系统 A 由 n 个独立的子系统串联而成，第 i 个子系统又由 m_i 个独立同分布的元件并联而成，第 i 个子系统的每个元件都服从 $P(\lambda_i)$，$\lambda_i > 0$.

设 $R_{ij}(t)$ 表示第 i 个子系统的第 j 个元件在时刻 t 的可靠性函数，$i = 1, 2, \cdots, n$，$j = 1, 2, \cdots, m_i$，$R_i(t)$ 表示第 i 个子系统在时刻 t 的可靠性函数，$R_s(t)$ 表示串并联系统在时刻 t 的可靠性函数，则有：$R_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m_i}[1 - R_{ij}(t)]$．由文献[5]知，$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n}\{1 - \prod_{j=1}^{m_i}[1 - R_{ij}(t)]\}$.

引理 1　设 t 为正整数，λ 为任意的实数，则

$$\sum_{k=t+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\Gamma(t+1)} \int_0^{\lambda} x^t \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x .$$

收稿日期：2009-01-03

作者简介：陈威玲（1984- ），女，浙江宁海人，硕士研究生，研究方向：应用统计

证明：利用分部积分法有：

$$\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\lambda} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{t\,!}(t\int_0^{\lambda} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \lambda^t \mathrm{e}^{-\lambda})$$

$$= \frac{1}{(t-1)\,!}\int_0^{\lambda} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \frac{\lambda^t}{t\,!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \frac{1}{(t-1)\,!}[(t-1)\int_0^{\lambda} x^{t-2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \lambda^t \mathrm{e}^{-\lambda}] - \frac{\lambda^t}{t\,!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$\cdots$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{t}\frac{\lambda^k}{k\,!}e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=t+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k\,!}e^{-\lambda}$$

证毕.

定理 1　若 $X \sim P(\lambda)$，$\lambda > 0$，$F(t)$ 和 $R(t)$ 分别是 X 的分布函数和可靠度函数，则

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda}^{+\infty} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,,$$

$$R(t) = \frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\lambda} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,.$$

证明：因为 $F(t) = P(X \le t) = \sum_{k=0}^{t}\frac{\lambda^k}{k\,!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$R(t) = 1 - F(t) = \sum_{k=t+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k\,!}e^{-\lambda}$，由引理 1 易证．从而可得：

$$R_{ij}(t) = P(X > t) = \sum_{k=t+1}^{+\infty}\frac{\lambda_i^k}{k\,!}\mathrm{e}^{-\lambda_i} = \frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\lambda_i} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,,$$

$\lambda_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$j = 1, 2, \cdots, m_i$．

$$R_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m_i}[1 - R_{ij}(t)] = 1 - \prod_{j=1}^{m_i}(\sum_{k=0}^{t}\frac{\lambda_i^k}{k\,!}\mathrm{e}^{-\lambda_i}) = 1 - (\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda_i}^{+\infty} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)^{m_i}\,.$$

则串并联系统可靠性表达式为：

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \prod_{i=1}^{n}[1 - (\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda_i}^{+\infty} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)^{m_i}]\,.$$

若 x_{ij} 表示来自 X_i 的 r_i 个样本，$j = 1, 2, \cdots, r_i$，其中 $X_i \sim P(\lambda_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则 λ_i 的极大似然估计为：

$$\widehat{\lambda_i} = \frac{1}{r_i}\sum_{i=1}^{r_i} x_{ij} = \overline{x_i}\,.$$

则由极大似然估计的不变性，有：

$$\widehat{R_s(t)} = \prod_{i=1}^{n}[1 - (\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\hat{\lambda}_i}^{+\infty} x^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)^{m_i}]\,.$$

2 并串联系统的可靠性

设某一系统 B 由 n 个独立的子系统并联组成，第 i 个子系统由 m_i 个独立同分布的元件串联而成，$R_p(t)$ 表示并串联系统在时刻 t 的可靠性函数，其它假设同 1．由文献[5]可得到并串联系统的可靠性为：

$$R_p(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-\prod_{j=1}^{m_i}R_{ij}(t)].$$

第 i 个子系统的每个元件都服从 $P(\lambda_i)$，$\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，由引理 1 可得：

$$R_p(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\lambda_i}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)^{m_i}].$$

根据极大似然估计不变性有：

$$\widehat{R_p(t)}=1-\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\hat{\lambda}_i}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)^{m_i}].$$

3 串并联、并串联系统的 Fiducial 置信限（当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时）

Fiducial 分布的要旨是在不涉及参数的先验分布的情况下，根据观察样本定出参数的一个分布[6]．因此本文根据样本给出 Poisson 分布未知参数 λ 的 Fiducial 分布，得出了串并联系统和并串联系统的 Fiducial 置信下限．

引理 2　函数 $h(\lambda)=\dfrac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\lambda}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 是关于 λ 的严格单调增函数．

证明：因为 $h'(\lambda)=\dfrac{1}{\Gamma(t+1)}\lambda^t\mathrm{e}^{-\lambda}>0$，所以 $h(\lambda)$ 是关于 λ 的严格单调增函数．

引理 3　函数 $g(\lambda)=\dfrac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda}^{+\infty}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 是关于 λ 的严格单调减函数．

证明：因为

$$g(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda}^{+\infty}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_0^{\lambda}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,$$

从而

$$g'(\lambda)=-\frac{1}{\Gamma(t+1)}\lambda^t\mathrm{e}^{-\lambda}<0,$$

所以 $g(\lambda)$ 是关于 λ 的严格单调减函数．

引理 4　$f(x)$ 是 x 的单调增（减）函数，$a\in N$，则 $[f(x)]^a$ 是 x 的单调增（减）函数．

证明：若 $f(x)$ 是 x 的单调增函数，设 $x_1<x_2$，则有：

$$f(x_1)<f(x_2),$$

$$\frac{[f(x_2)]^a}{[f(x_1)]^a}=\left[\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right]^a=\left[1+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)}\right]^a>1^a=1,$$

故 $[f(x)]^a$ 是 x 的单调增函数.

当 $f(x)$ 是 x 的单调减函数时，同理可证.

定理 2 $R_s(t,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda}^{+\infty}x^t e^{-x}dx)^{m_i}]$ 是 λ 的严格单调增函数； $R_p(t,\lambda)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{0}^{\lambda}x^t e^{-x}dx)^{m_i}]$ 是 λ 的严格单调增函数.

证明：因为

$$R_s(t,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{\lambda}^{+\infty}x^t e^{-x}dx)^{m_i}],$$

由引理 3 和引理 4 易知， $R_s(t,\lambda)$ 是 λ 的严格单调增函数.

因为

$$R_p(t,\lambda)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{0}^{\lambda}x^t e^{-x}dx)^{m_i}],$$

同理，由引理 2 和引理 4 可知， $R_p(t,\lambda)$ 是 λ 的严格单调增函数.

引理 5[1] 设服从参数为 λ 的 Poisson 分布的随机变量为 X ，$X_1,X_2,\cdots X_m$ 是来自 X 的样本，则 $2m\lambda$ 的 Fiducial 分布为 $2m\lambda\sim\chi^2(2T)$ ，即

$$\lambda\sim\frac{1}{2m}\chi^2(2T),$$

其中 $T=X_1+X_2+\cdots+X_m$. 对于给定的置信度 $1-\alpha$， λ 的置信下限为：

$$cl_{1-\alpha}=\frac{1}{2m}\chi^2_{1-\alpha}(2T).$$

定理 3 由 Poisson 分布型元件组成的串并联系统可靠性 $R_s(t,\lambda)$ 和并串联系统可靠性 $R_p(t,\lambda)$，对于给定的置信度 $1-\alpha$，其 Fiducial 置信下限分别为

$$R_s(t,cl_{1-\alpha})=\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{cl_{1-\alpha}}^{+\infty}x^t e^{-x}dx)^{m_i}], \tag{1}$$

$$R_p(t,cl_{1-\alpha})=1-\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{1}{\Gamma(t+1)}\int_{0}^{cl_{1-\alpha}}x^t e^{-x}dx)^{m_i}]. \tag{2}$$

证明：因为串并联系统可靠性 $R_s(t,\lambda)$ 是 λ 的严格单调增函数，由引理 5 有：

$$\begin{aligned}P(R_s(t,\lambda)>R_s(t,cl_{1-\alpha}))&=P(R_s(t,\lambda)>R_s(t,\frac{1}{2m}\chi^2_{1-\alpha}(2T)))=\\&P(\lambda>\frac{1}{2m}\chi^2_{1-\alpha}(2T))=\\&P(2\lambda m>\chi^2_{1-\alpha}(2T))=\\&1-\alpha\end{aligned}$$

同理可证，并串联系统可靠性 $R_p(t,\lambda)$ 的置信下限为 $R_p(t,cl_{1-\alpha})$.

4 模拟分析

给定子系统的个数 n 及每个子系统所包含的元件数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，给定样本数 m 及 t 和 Poisson 分布参数 λ 值，可以得到系统可靠性的真值 R . 利用 MATLAB 产生 m 个 Poisson 随机数，计算出参数的估计值 $\hat{\lambda}$ 和 T ，根据引理 5 得到 $cl_{1-\alpha}$ ，代入式（1）和式（2），算得系统可靠性的置信下限，模拟次数为 10 000 次，计算覆盖率 c. 结果见表 1.

表 1 串并联系统和并串联系统的模拟计算结果

Table 1 Simulation Results of Series-parallel System and Parallel-series System

系统类型	n	m_i	t	m	λ	$\hat{\lambda}$	$1-\alpha$	c
串并联系统	3	10 15 20	4	10	2	2.2	0.9	0.912 8
	4	10 10 20 20	4	20	5	5	0.95	0.95
并串联系统	3	3 4 5	4	10	2	2.2	0.9	0.910 3
	4	2 2 2 2	4	20	5	5.1	0.95	0.957 7

覆盖率 c 是指模拟中计算出的系统可靠度置信下限小于系统可靠度真值的比率，覆盖率可以近似地看作所用评估方法的实际近似水平，它越接近预定的置信水平说明该方法越好.

从表 1 中的数据可以看出，样本数越多，参数估计值越准确. 本文提出的方法得到的置信下限是“保守”的，说明运用 Fiducial 方法求 Poisson 型元件组成的串并联系统和并串联系统可靠性的置信下限是切实可行的.

参考文献

[1] 范大茵，郑海鹰. 泊松型元件贮备系统可靠性 Fiducial 置信限[J]. 浙江大学学报：自然科学版，1999，33(1): 15-18.

[2] LIU Y, GAO Y N. An Unbiased Estimator of Poisson Statistics [J]. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2007, 31(7): 660-663.

[3] 刘银萍，宋立新. II 型截尾情形下的泊松分布参数的估计[J]. 吉林大学学报：理学版, 2007, 45(6): 941-944.

[4] 范大茵. 成败型元件串并联系统及并串联系统可靠性近似解的讨论[J]. 高校应用数学学报：A 辑，1989，4(3): 451-457.

[5] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社, 2006: 43-45.

[6] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京：科学出版社, 1981: 403-406.

Lower Confidence Limits of Reliability for Series-parallel System and Parallel-series System with Poisson Components

CHEN Weiling, ZHENG Haiying
(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: Based on the relationship between the cumulative function of the Poisson distribution and the incomplete Gamma function, the expressions of the reliability in the series-parallel system and the parallel-series system which composed of Poisson components were obtained. Based on the sample data of the Poisson components, the Fiducial distribution of the unknown parameter was obtained, then the Fiducial lower confidence limits formulas of the reliability for these systems were present. Finally, numerical simulation was carried out to verify the conclusions.

Key words: Poisson Distribution; Reliability; Series-parallel System; Parallel-series System; Fiducial Lower Confidence Limit

(编辑：王一芳)