第 30 卷第 3 期　　温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版　　2009 年 6 月
Vol 30, No 3　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Jun, 2009

多项式约束优化问题的一种新方法

余览姆

(温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035)

摘　要：针对带多项式不等式约束和多项式等式约束优化问题，提出了一个新的求全局最优解的方法：首先将其不等式约束转化为等式约束，然后按 K-T 条件将其化为解方程组问题，再利用软件包 Wsolve 求出方程组的解，从而获得原问题的全局最优解．实例计算表明，该方法在解这类优化问题时，是简明和行之有效的.

关键词：多项式约束优化；全局最优解；K-T 点；软件包 Wsolve

中图分类号：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)03-0022-05

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.03.005　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

带多项式约束优化问题是非线性约束优化问题，它在经济计划、生产管理、交通运输、电力分配、政府决策、生产自动化等方面有着重要应用，但它的求解是一个颇具挑战性的问题，一直受到研究者的关注．比较传统的求解方法是采用数值计算的方法，例如：遗传算法、最速下降法、梯度法、罚函数法、Lagrange 函数法等．用这些方法所得到的解可能是近似解，也可能是局部最优解．本文基于吴方法[1,2]（也称数学机械化思想），特别是由中国科学院数学机械化重点实验室开发的软件包 Wsolve[3]，提出了一个新的解带多项式不等式约束和多项式等式约束优化问题的方法，它与数值计算法不同，采用的是符号计算，依据的是计算机代数与代数几何理论．利用该方法可以解得问题的全局最优解、精确解.

设 $a_1,\cdots,a_n\in R$，本文考虑如下带多项式约束的非线性优化问题（PNP）：

$$\min f(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x_1,\cdots,x_n)\le 0 & i=1,\cdots,r \\ h_j(x_1,\cdots,x_n)=0 & j=1,\cdots,s \\ x_k\ge a_k & k=1,\cdots,n \end{cases}$$

其中 $f(x_1,\cdots,x_n),g_i(x_1,\cdots,x_n),h_j(x_1,\cdots,x_n)\in R[x_1,\cdots,x_n]$.

1 方　法

基于吴方法，本文对问题（PNP）提出一个新的求解方法，其步骤如下：

步骤 1　引进新变量 $t_0,t_1,\cdots,t_{n+r}$，新多项式

收稿日期：2008-07-29

作者简介：余览姆(1957-)，男，浙江温州人，副教授，研究方向：多目标优化

$$p_0 = f(t_1^2 + a_1, \cdots, t_n^2 + a_n) - t_0,$$
$$p_i = g_i(t_1^2 + a_1, \cdots, t_n^2 + a_n) + t_{n+i}^2 \qquad i = 1, \cdots, r,$$
$$p_{r+j} = h_j(t_1^2 + a_1, \cdots, t_n^2 + a_n) \qquad j = 1, \cdots, s,$$

并考虑下面的问题（PNP）$^+$：

$$\min t_0$$
$$\text{s.t. } p_k(t_0, t_1, \cdots, t_{n+r}) = 0 \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, r+s,$$

其中 $t_0, t_1, \cdots, t_{n+r} \in R$.

全文作如下基本假设：

假设 1　对任意的 $t = (t_0, t_1, \cdots, t_{n+r}) \in R^{n+r+1}$，向量组 $\{\nabla p_0(t), \nabla p_1(t), \cdots, \nabla p_{r+s}(t)\}$ 线性无关．下面的引理是显然的．

引理　问题（PNP）$^+$ 有最优解的充要条件是问题（PNP）有最优解．当 $t^* = (t_0^*, t_1^*, \cdots, t_{n+r}^*)$ 为（PNP）$^+$ 的最优解时，$x^* = (t_1^{*2} + a_1, \cdots, t_n^{*2} + a_n)$ 为（PNP）的最优解，且其最优值为 t_0^*．

步骤 2　构造问题（PNP）$^+$ 的 Lagrange 多项式

$$L = t_0 + \sum_{j=0}^{r+s} \lambda_j p_j$$

及 Lagrange 多项式组

$$PS = \left\{ \frac{\partial L}{\partial t_i}, p_j \middle| i = 0, 1, \cdots, n+r,\ j = 0, 1, \cdots, r+s \right\}.$$

步骤 3　用软件包 Wsolve 将多项式组 PS 分解为一组升列．

取变量次序 $t_0 \prec t_1 \prec \cdots \prec t_{n+r} \prec \lambda_0 \prec \lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_{r+s}$，由吴整序原理和零点分解定理[4]知，存在一组由 PS 所确定的升列 $C_k \subset R[t_0, t_1, \cdots, t_{n+r}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{r+s}]$，使

$$\mathrm{Zero}(PS) = \bigcup \mathrm{Zero}(C_k / I_{C_k}), \tag{1}$$

其中 I_{C_k} 是 C_k 中多项式初式的乘积．由（1）式可以确定一实数集合 $K = \bigcup K_i$，其中 K_i 为升列 C_i 的第一多项式 p_{i1} 的所有正常实零点所构成的集合．

步骤 4　利用实数集 K 和（1）式确定（PNP）的最优解和最优值．

取 K 的最小值 m，设 $m \in K_i$．对 $t_0 = m$，若 K_i 对应的升列 C_i 有实零点 $(m, t_1^*, \cdots, t_{n+r}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_{r+s}^*)$，则输出 $x^* = (t_1^{*2} + a_1, \cdots, t_n^{*2} + a_n)$ 和 $t_0^* = m$．否则，取 $K \setminus \{m\}$ 的最小值．重复上述过程，直到对应的升列有实零点．

全局最优化定理：设问题（PNP）有最优解，条件假设 1 成立，x^* 和 t_0^* 由步骤 4 所得，则 x^* 为（PNP）的最优解，且其最优值为 t_0^*．

证明：由步骤 4，存在实数 $m, t_1^*, \cdots, t_{n+r}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_{r+s}^*$ 使 $x^* = (t_1^{*2} + a_1, \cdots, t_n^{*2} + a_n)$，$t_0^* = m$，$(m, t_1^*, \cdots, t_{n+r}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_{r+s}^*)$ 为 PS 的一零点，且

$$m = \min\{t_0 \in R \mid (t_0, t_1, \cdots, t_{n+r}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{r+s}) \text{ 为 } PS \text{ 的实零点}\}$$

$$=\min\{t_0\in R\big|(t_0,t_1,\cdots,t_{n+r},\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{r+s})\text{ 为（PNP）}^+\text{ 的 K-T 点}\}.$$

按引理，问题（PNP）$^+$ 有最优解．从条件假设 1 成立知，（PNP）$^+$ 的极小点为其 K-T 点，故 $t^*=(t_0^*,t_1^*,\cdots,t_{n+r}^*)$ 是（PNP）$^+$ 的最优解，再由引理得，$x^*=(t_1^{*2}+a_1,\cdots,t_n^{*2}+a_n)$ 为（PNP）的最优解，且其最优值为 t_0^*.

2 算 例

下面用一个实例来说明本文方法的求解过程.

例：$\min\ x_1^2-x_2^2-x_3^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 1\\ x_1^2+x_2^2-x_3=0\\ x_i\ge 0,\quad i=1,2,3.\end{cases}$$

由于此问题的可行域是有界闭集，故其最优解存在．其求解过程如下：

引进新变量 $t_0,t_1,\cdots,t_6$，新多项式

$$p_0=t_1^4-t_2^4-t_3^4-t_0,$$

$$p_1=t_1^2+t_2^2+t_3^2-1+t_4^2,$$

$$p_2=t_1^4+t_2^4-t_3^2,$$

构造问题的 Lagrange 多项式

$$L=t_0+\lambda_0p_0+\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$$

及 Lagrange 多项式组

$$PS=\begin{Bmatrix}1-\lambda_0,\ 4\lambda_0t_1^3+2t_5t_1+4t_6t_1,\ -4\lambda_0t_2^3+2t_5t_2+4t_6t_2,\\ -4\lambda_0t_3^3+2t_5t_3-4t_6t_3,\ 2t_5t_4,\ p_0,\ p_1,\ p_2\end{Bmatrix}.$$

对此 PS，应用软件包 Wsolve 得 10 个升列：

C_1=[2*t1^2+λ2*t0+λ1+λ2,4*t2^2*t1^2-λ1*t0,t4,t3,t1^2+t2^2-1,2*t1^2-t0-1,t0^2+1]；

C_2=[2*t3^2-λ1+λ2,4*t3^2*t1^2-2*t1^2-λ1*t0-2*λ1,t4,t1^4+t2^4-t3^2,t2,2*t1^2-t0-1,t0^2+4*t0-1]；

C_3=[2*t3^2-λ1+λ2,8*t3^2*t2^2+4*t2^2-λ1*t0-5*λ1,t4,t1^4+t2^4-t3^2,2*t1^4+4*t1^2+4*t2^2-t0-3,t1,t0^2+10*t0+5]；

C_4=[2*t3^2-λ1+λ2,32*t0^3*t3^2*t1^2-264*t0^2*t3^2*t1^2-184*t0*t3^2*t1^2+24*t3^2*t1^2-16*t0^3*t1^2+132*t0^2*t1^2+92*t0*t1^2-12*t1^2+12*λ1*t0^3-21*λ1*t0^2-15*λ1*t0+24*λ1,t4,t1^4+t2^4-t3^2,16*t0^3*t1^4-132*t0^2*t1^4-92*t0*t1^4+12*t1^4+4*t0^3*t1^2-33*t0^2*t1^2-23*t0*t1^2+3*t1^2-78*t0^2*t2^2-54*t0*t2^2-15*t2^2-8*t0^3+66*t0^2+46*t0-6,16*t0^3*t1^2-132*t0^2*t1^2-92*t0*t1^2+12*t1^2+20*t0^3-87*t0^2-61*t0+30,32*t0^4+520*t0^3+733*t0^2+178*t0-91]；

C_5=[λ1,t1^2+t2^2+t3^2+t4^2-1,t3,t2,t1,t0]；
C_6=[2*λ2*t2^2-2*t2^2+λ1,λ1,t1^2+t2^2+t3^2+t4^2-1,t3,t1^4+t2^4,t1,t0]；
C_7=[λ2-1,λ1,t1^2+t2^2+t3^2+t4^2-1,t3,t1^4+t2^4,t1,t0]；
C_8=[2*t3^2-λ1+λ2,λ1,t1^2+t2^2+t3^2+t4^2-1,t1^4+t2^4-t3^2,t2,t1,0]；
C_9=[2*t3^2-λ1+λ2, λ1, t1^2+t2^2+t3^2+t4^2-1, t1^4+t2^4-t3^2, t2, 2*t1^4-1, 4*t0-1]；
C_{10}=[2*t3^2-λ1+λ2,λ1,t1^2+t2^2+t3^2+t4^2-1,t1^4+t2^4-t3^2,2*t1^4+2*t2^4+1, t1,4*t0-1]].

对应的第一多项式的所有正常实零点所构成的集合依次为：

$$K_1=\varnothing,\quad K_2=\{-2-\sqrt{5},-2+\sqrt{5}\},\ K_3=\{-5-2\sqrt{5},-5+2\sqrt{5}\},$$

$$K_4=\{-\frac{\sqrt{27\sqrt{753}-733}}{8},\ \frac{\sqrt{27\sqrt{753}-733}}{8}\},$$

$$K_5=K_6=K_7=K_8=\{0\},\quad K_9=K_{10}=\{\frac{1}{4}\}.$$

由此确定了实数集：

$$K=\bigcup_{i=1}^{10}K_i$$
$$=\{-5-2\sqrt{5},-5-\sqrt{5},-5+2\sqrt{5},-\frac{\sqrt{27\sqrt{753}-733}}{8},0,\ \frac{1}{4},-2+\sqrt{5},\frac{\sqrt{27\sqrt{753}-733}}{8}\}.$$

取 $t_0=\min K=-5-2\sqrt{5}\in K_3$，这时 K_3 对应的升列 C_3 没有实零点.

取 $t_0=\min K\setminus\{-5-2\sqrt{5}\}=-5-\sqrt{5}\in K_2$，这时 K_2 对应的升列 C_2 没有实零点.

取 $t_0=\min K\setminus\{-5-2\sqrt{5},-5-\sqrt{5}\}=-5+2\sqrt{5}\in K_3$，这时 K_3 对应的升列 C_3 有 4 个实零点：

$$\left(-5+2\sqrt{5},0,\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2},0,\frac{5\sqrt{5}-9}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}}\right);$$

$$\left(-5+2\sqrt{5},0,-\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2},0,\frac{5\sqrt{5}-9}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}}\right);$$

$$\left(-5+2\sqrt{5},0,\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{5}+1}{2},0,\frac{5\sqrt{5}-9}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}}\right);$$

$$\left(-5+2\sqrt{5},0,-\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{5}+1}{2},0,\frac{5\sqrt{5}-9}{\sqrt{5}},\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}}\right).$$

由此得 $x^*=(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})$ 为原问题的最优解，其最优值为 $-5+2\sqrt{5}$.

不难看出本文所提出的方法是可行和实用的，且有广阔的应用前景.

参考文献

[1] Wu W T. On the decision problem and the mechanization of theorem in elementary geometry [J]. Scientia Sinica, 1978, 21: 159-172.

[2] Wu W T. Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometries [M]. Beijing: Science Press, 1984: 207-235.

[3] Wang D K, Zhi L H. Software development in MMRC [C] // Yang W, Wang D. Proceedings of the ATCM'95. Singapore: Academic Press, 1995: 234-243.

[4] Wu W T. On a finiteness theorem about problems involving inequalities [J]. Systems Science and Mathematical Science, 1994, 7: 193-200.

New Method for Solving Polynomial Constraint Optimization Problem

YU Lanmei

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: A global optimization solution for nonlinear programming problems with polynomial inequality and equality constraints is offered in the paper. Firstly, the programming with polynomial inequality constraints was transformed into a programming with polynomial equality constraints. Secondly, the solution of the polynomial constrained optimization problem was gained by using the K–T condition and the software Wsolve to solve the polynomial set. Practice shows that this method is simple but efficient in solving this kind of optimization problem.

Key words: Polynomial Constrained Optimization Problem; Global Optimal Solution; K-T Point; Software Wsolve

(编辑：王一芳)