两部件指数型元件温贮备系统可靠性的 fiducial 置信限

郑海鹰

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：基于元件的定数截尾寿命试验数据和切换开关的成败型试验数据，对两部件温贮备系统可靠性的置信限进行了研究，分别得到了系统精确和近似 fiducial 置信限模型，最后给出随机模拟例子并讨论了置信限的精度.

关键词：指数分布；温贮备；可靠性；fiducial 置信限

中图分类号：O151.23　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2008)02-0038-05

可靠性是产品的关键性质量指标，对复杂的高科技产品，尤为重要，为了提高系统可靠性，常采取冗余措施，即在系统中放进几个完全相同或功能相同的部件，称之为冗余系统.

冗余系统有两类：表决系统和贮备系统．关于表决系统可靠性评定问题，国内外已有许多研究，相对比较成熟．贮备系统又有热贮备和冷贮备之分．因表决和热贮备系统中部件均处于工作状态，故冷贮备和温贮备冗余技术能更有效地提高复杂系统的可靠性，目前该技术在航天、航空的产品中已被广泛应用，因此，如何利用部件试验信息，评估贮备系统的可靠性，显得尤为重要．文献[1]在工作部件和贮备部件及开关的寿命均为指数分布的情况下，对冷贮备和温贮备两部件系统的可靠性作了比较系统的研究．文献[2]、文献[3]对一类可修系统贮存模型的可用度进行了 Fiducial 推断，文献[4]运用 WCF 法与 Fiducial 方法对指数——威布尔混合型冷贮备系统的可靠性进行了评定，文献[5]运用 Fiducial 方法，对指数型元件冷贮备系统的近似置信限进行了讨论．目前对温贮备系统的可靠性评定的文献很少，大多是关于对冷贮备系统的研究．本文依据 Fiducial 理论，基于元件的定数截尾寿命试验数据和切换开关的成败型试验数据，用 Beta 分布来拟合系统可靠性置信限的方法，对工作部件和贮备部件寿命均为指数分布、开关寿命为成败型的系统可靠性进行了讨论.

设部件 X_i 的工作寿命和贮备寿命均服从参数为 λ 的指数分布，$\lambda > 0$，$i = 1,2$，Y_2 表示部件 2 的贮备寿命.

开关寿命 X_k 服从 $b(1, p)$ 分布，$0 < p < 1$，令 $X_k = \begin{cases} 1\text{，使用开关时开关正常；} \\ 0\text{，使用开关时开关失效.} \end{cases}$

且 $P(X_k = 1) = p$，$P(X_k = 0) = 1 - p$，$0 < p < 1$.

收稿日期：2007-10-06

作者简介：郑海鹰（1961-），男，浙江台州人，副教授，硕士，研究方向：应用统计

于是系统的寿命可表示为： $X = X_1 + X_2 I_{(Y_2 > X_1)} I_{(X_k = 1)}$.

故由全概率公式和独立性

$$\begin{aligned} R(t) &= P\left\{\ X > t\ \right\} = P\left\{X_1 > t,\ X_K = 0\right\} + P\left\{X_1 + X_2 I_{(Y_2 > X_1)} > t,\ X_K = 1\right\} \\ &= qP\left\{X_1 > t\right\} + pP\left\{X_1 + X_2 I_{(Y_2 > X_1)} > t\right\} = e^{-\lambda t} + p(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}), \end{aligned}$$

记 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$. 众所周知， λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$， p 的极大似然估计为 $\hat{p} = \frac{S}{N}$. 于是，由极大似然估计的不变性，可得：

（1）在 p 已知时， $R(t,\lambda,p)$ 的极大似然估计是 $\hat{R}(t,\lambda,p) = e^{-\frac{t}{\bar{x}}} + p[e^{-\frac{t}{\bar{x}}} - e^{-\frac{2t}{\bar{x}}}]$；

（2）在 λ 已知时， $R(t,\lambda,p)$ 的极大似然估计是 $\hat{R}(t,\lambda,p) = e^{-\lambda t} + \frac{S}{N}[e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}]$；

（3）在 λ 与 p 均未知时， $R(t,\lambda,p)$ 的极大似然估计是 $\hat{R}(t,\lambda,p) = e^{-\frac{t}{\bar{x}}} + \frac{S}{N}[e^{-\frac{t}{\bar{x}}} - e^{-\frac{2t}{\bar{x}}}]$.

1 系统可靠性精确 fiducial 置信限

引理 1 $R(t,\lambda,p)$ 是关于 λ 的严格递减函数.

证明： $\frac{\partial}{\partial\lambda} R(t,\lambda,p) = te^{-\lambda t}\left[2pe^{-\lambda t} - (1+p)\right] < te^{-\lambda t}(2p - p - 1) < 0$，所以 $R(t,\lambda,p)$ 是关于 λ 的严格递减函数.

设对元件有定数截尾寿命试验数据 (n, r)， $T = X_{(1)} + X_{(2)} + \cdots + X_{(r)} + (n - r) \times X_{(r)}$，这里 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(r_0)}$ 表示最先失效的 r 个元件的寿命. 由文[6]知， $2\lambda T \sim \chi^2(2r)$，若在 p 未知时，切换开关有成败型试验数据 (N, s)， N 为试验数据， s 为成功数，由文[6]，则 p 的 fiducial 分布为 $p \sim Beta(s, N - s + 1)$.

定理 1 在 p 已知时， $R(t,\lambda,p)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的 fiducial 精确置信下限是 $R(t, cl_\alpha^{(1)}(T), p)$，其中 $cl_\alpha^{(1)}(T) = \frac{1}{2T}\chi_\alpha^2(2T)$，且 $P(\chi^2(2T) > \chi_\alpha^2(2T)) = \alpha$.

证明：由引理知， $R(t,\lambda,p)$ 是 λ 的严格递减函数，又因为 $2\lambda T \sim \chi^2(2r)$，所以 $\lambda \sim \frac{1}{2T}\chi^2(2r)$，从而

$$\begin{aligned} P(R(t,\lambda,p) \ge R(t, cl_\alpha^{(1)}(T), p)) &= P(R(t,\lambda,p)) \\ &\ge P(R(t, \frac{1}{2T}\chi_\alpha^2(2r), p)) = P(\lambda \le \frac{1}{2T}\chi_\alpha^2(2r)) \\ &= P(2\lambda T \le \chi_\alpha^2(2r)) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

证毕.

定理 2 在 λ 已知时， $R(t,\lambda,p)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的 fiducial 精确置信下限是

$R(t,\lambda,cl_{1-\alpha}^{(2)})$，其中 $cl_{1-\alpha}^{(2)}$ 是方程 $\int_x^1 \frac{t^{s-1}(1-t)^{N-s}}{B(s,N-s+1)}dt = 1-\alpha$ 的根.

证明：由 $R(t,\lambda,p) = e^{-\lambda t} + p(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})$，知 $R(t,\lambda,p)$ 是 p 的严格递增函数，

$$P(R(t,\lambda,p) > R(t,\lambda,cl_{1-\alpha}^{(2)})) = P(p > cl_{1-\alpha}^{(2)})$$
$$= \int_{cl_{1-\alpha}^{(2)}}^1 \frac{t^{s-1}(1-t)^{N-s}}{B(s,N-s+1)}dt = 1-\alpha.$$

证毕.

2 当 λ, p 均未知时，系统可靠性之近似 fiducial 置信限

当 λ, p 均未知，要利用 λ, p 的 fiducial 分布求 $R(t,\lambda,p)$ 的精确 fiducial 分布显然不容易，因而考虑其近似分布．由于 $R(t,\lambda,p)$ 的取值在区间 $(0,1)$ 上，而在区间 $(0,1)$ 上取值的 Beta 分布是一种常见分布，因而考虑一阶、二阶矩拟合原则下，用 Beta 分布近似系统可靠度 $R(t,\lambda,p)$ 的 fiducial 分布，为此先计算 $E[R(t,\lambda,p)]$，$E[R(t,\lambda,p)]^2$．由于

$$2\lambda T \sim \chi^2(2r), \quad p \sim Beta(s,N-s+1)$$
$$E[R(t,\lambda,p)] = E(e^{-\lambda t}) + Ep \cdot E(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})$$

而

$$E(e^{-\lambda t}) = Ee^{-(2T\lambda)\cdot\frac{t}{2T}} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2T}x}\frac{1}{2\Gamma(r)}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-1} e^{-\frac{x}{2}}dx = \left(\frac{T}{T+t}\right)^r$$

同理，

$$E(e^{-2\lambda t}) = \left(\frac{T}{T+2t}\right)^r, \quad Ep = \int_0^1 x\frac{x^{s-1}(1-x)^{N-s}}{B(s,N-s+1)}dx = \frac{B(s+1,N-s+1)}{B(s,N-s+1)}$$

所以

$$E[R(t,\lambda,p)] = \left(\frac{T}{T+2t}\right)^r + \frac{B(s+1,N-s+1)}{B(s,N-s+1)}\left[\left(\frac{T}{T+t}\right)^r - \left(\frac{T}{T+2t}\right)^r\right]$$

由

$$R^2(t,\lambda,p) = e^{-2\lambda t}(p+1)^2 - 2(p^2+p)e^{-3\lambda t} + p^2 e^{-4\lambda t}$$
$$Ep^2 = \int_0^1 x^2\frac{x^{s-1}(1-x)^{N-s}}{B(s,N-s+1)}dx = \frac{B(s+2,N-s+1)}{B(s,N-s+1)}$$
$$E(e^{-3\lambda t}) = Ee^{-(2T\lambda)\cdot\frac{3t}{2T}} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3t}{2T}x}\frac{1}{2\Gamma(r)}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-1} e^{-\frac{x}{2}}dx = \left(\frac{T}{T+3t}\right)^r$$

同理，

$$E(e^{-4\lambda t}) = \left(\frac{T}{T+4t}\right)^r$$

所以，

$$
\begin{aligned}
E[R(t,\lambda,p)]^2 &= \left[\frac{B(s+2,N-s+1)}{B(s,N-s+1)} + 2\frac{B(s+1,N-s+1)}{B(s,N-s+1)} + 1\right]\left(\frac{T}{T+2t}\right)^r \\
&\quad -2\left[\frac{B(s+2,N-s+1)}{B(s,N-s+1)} + \frac{B(s+1,N-s+1)}{B(s,N-s+1)}\right]\left(\frac{T}{T+3t}\right)^r \\
&\quad +\frac{B(s+2,N-s+1)}{B(s,N-s+1)}\left(\frac{T}{T+4t}\right)^r
\end{aligned}
$$

记 $E(R)=G$，$ER^2=H$，若 $V \sim Beta(a,b)$，经计算得 $EV=\dfrac{a}{a+b}$，$EV^2=\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$，

建立方程组 $\begin{cases} \dfrac{a}{a+b}=G \\ \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}=H \end{cases}$，解得

$$a=\frac{G(G-H)}{H-G^2},\quad b=\frac{(1-G)(G-H)}{H-G^2},$$

于是 $R(t,\lambda,p)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 fiducial 近似置信下限是 $\int_x^1 \dfrac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)}dt=1-\alpha$ 之根.

3 近似置信限精度的讨论

为评价由以上方法得到的系统可靠度 $R(t,\lambda,p)$ 的近似置信下限的精度，本文对 λ,p 均未知时，系统可靠性之近似 fiducial 置信限进行了模拟计算，选取如下三个指标对模拟结果进行评判：

（1）覆盖率

覆盖率即模拟中计算出的系统可靠度置信下限小于系统可靠度真值的比率，覆盖率可近似地看作是所用评估方法的实际置信水平，它越接近预定的置信水平，说明该方法越好.

（2）置信下限 γ 分位点

这里的 γ 是预先给定的置信水平，如果模拟了 n 次，得到 n 个置信下限，这些置信下限的 γ 分位数称为置信下限 γ 分位点．按置信下限的定义，$\left(P\{R \ge R_l\}=\gamma\right)$，它与系统可靠度真值越接近说明该方法越好.

（3）置信下限的均方误差

置信下限的均方误差是指计算出的系统可靠度置信下限相对于系统可靠度真值的均方误差，在按覆盖率或分位点指标为优的前提下，该量越小越好.

模拟步骤如下

（1）给定 λ,t,p 一组值 λ_0,t_0,p_0，计算 $R(t_0)$，并给出 n_0；

（2）用 Monte-Carlo 方法产生分布 $1-e^{-\lambda_0 t}$ 的 n_0 个样本；

（3）利用上述公式可得系统可靠性的近似置信限；

（4）重复步骤（2），（3）500 次

运用 Monte-Carlo 方法模拟的部分结果见表 1.

表 1　置信限模拟结果

样本量	失效量	可靠度				置信水平 r=0.75			置信水平 r=0.85		
		部件	备件	开关	系统	覆盖率	均方误差	分位点	覆盖率	均方误差	分位点
20	15	0.989 5	0.992 5	0.992 5	0.991 0	0.751 5	0.014 0	0.992 1	0.852 1	0.006 1	0.992 0
30	18	0.989 5	0.992 5	0.992 5	0.991 5	0.760 1	0.005 1	0.992 3	0.860 8	0.005 6	0.992 3
40	30	0.989 5	0.992 5	0.992 5	0.991 5	0.749 2	0.004 1	0.991 8	0.853 8	0.017 4	0.992 4

由模拟结果可以看出，分位点与系统可靠度真值的绝对误差在 0.05 以内，均方误差都在 0.02 以内，所以本文所提出的近似计算方法是可行的.

参考文献

[1] 遇今，薛宏旗. 冷备和温备系统的可靠度评估方法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 35(10): 35-41.
[2] 杨军，于丹. 一类可修系统贮备模型及其可用度的 Fiducial 推断[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(1): 48-58.
[3] 闫霞，于丹，李国英. 一类可修威布尔型设备可用度的 Fiducial 推断[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 17-27.
[4] 黄宝胜，李国英. 冷贮备系统可靠性评定的统计方法[J]. 系统科学与数学, 2005, 25(2): 204-215.
[5] 吴和成. 指数型元件贮备系统可靠性的近似置信限[J]. 工程数学学报, 2000, 17(3): 11-17.
[6] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京：科学出版社, 1981: 358-394.

The Fiducial Confidence Limits of the Reliability for Warm Stand-by System with Two Components of Exponential Type Components

ZHENG Haiying
(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China　325035)

Abstract: The problems of reliability confidence limits for warm stand-by systems with two components are studied, and we get the model to calculate accurate and approximate fiducial lower confidence limits of the reliability based on fixed number testing data of components and pass-fail testing data of switch. In the end, an illustrative example is examined numerically by means of the Monte-Carlo simulation and the accuracy of confidence limit being discussed.

Key words: Exponential distribution; Warm stand-by; Reliability; Fiducial confidence limit

(编辑：王一芳)