# 两不同型部件温贮备可修系统的可靠性分析

胡兆红，陈希镇

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州 325035）

**摘 要：**在假定转换开关完全可靠，部件的工作寿命、贮备寿命、工作故障后的修理时间和贮备故障后的修理时间均服从不同型的指数分布的条件下，研究了两个不同型部件、一个修理设备组成的温贮备可修系统．利用马尔可夫型可修系统的研究方法和 Maple 11.0 软件，得到了该系统有关首次故障前的平均时间、可用度和故障频度等可靠性指标的表达式．

**关键词：**温贮备可修系统；指数分布；可靠性

**中图分类号：**O213 **文献标志码：**A **文章编号：**1674-3563(2009)04-0044-05

**DOI：**10.3875/j.issn.1674-3563.2009.04.008 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

两不同型部件温贮备可修系统的可靠性模型是可靠性理论和应用中比较重要的模型之一．所谓温贮备是指贮备部件在贮备期内可能失效，部件的贮备寿命和工作寿命分布一般不相同．曹晋华和程侃[1]研究了两个不同型部件、一个修理设备组成的温贮备可修系统，其假定条件是部件的工作寿命、贮备寿命、故障后的修理时间均服从不同型的指数分布，他们把部件工作故障后的修理时间分布与贮备故障后的修理时间分布看成是同一指数分布．但在实际情况中，有时部件工作故障后的修理时间分布与贮备故障后的修理时间分布并不相同．本文在曹晋华和程侃研究的基础上，假定部件工作故障后的修理时间分布与贮备故障后的修理时间分布服从不同型的指数分布，利用马尔可夫型可修系统的研究方法和 Maple 11.0 软件，讨论了系统的主要可靠性指标．

## 1 系统模型的建立

1）假设部件 $i$ 的工作寿命分布、贮备寿命分布、工作故障后的修理时间分布和贮备故障后的修理时间分布分别为：

$$A_i(t)=1-e^{-\lambda_i t}\text{，}\ B_i(t)=1-e^{-\nu_i t}\text{，}\ C_i(t)=1-e^{-\mu_i t}\text{，}\ D_i(t)=1-e^{-w_i t}\text{，}$$

其中，$t\ge 0$，$\lambda_i,\nu_i,\mu_i,w_i>0$，$i=1,2$．

2）当系统中两个部件都正常时，则一个部件处于工作状态，另一个部件处于温贮备状态．当工作部件发生故障时，贮备部件立即去替换而转为工作状态；当工作部件发生故障，贮备部件也发生故障时，系统停止工作[2]．修理设备根据谁先坏先修谁的原则，对部件进行修理．假定工作部件的寿命分布与其曾贮备了多长时间无关，故障部件修复后的寿命分布与新部件相同，部件的状态转换开关是完全可靠的，开关转换是瞬时的．

3）随机变量 $A_i(t),B_i(t),C_i(t),D_i(t)(i=1,2)$ 相互独立，$\lambda_i,\nu_i,\mu_i,w_i(i=1,2)$ 互不相同．

**收稿日期：**2008-12-11

**作者简介：**胡兆红（1983-），男，湖北武汉人，助教，硕士，研究方向：金融统计，风险管理

## 2 系统的状态方程组

根据上述系统模型的构造，可知系统共有 10 个不同的状态：

状态 0：部件 1 在工作，部件 2 贮备；

状态 1：部件 2 在工作，部件 1 贮备；

状态 2：部件 1 在工作，部件 2 工作故障在修理；

状态 3：部件 1 在工作，部件 2 贮备故障在修理；

状态 4：部件 2 在工作，部件 1 工作故障在修理；

状态 5：部件 2 在工作，部件 1 贮备故障在修理；

状态 6：部件 1 工作故障在修理，部件 2 工作故障待修；

状态 7：部件 1 贮备故障在修理，部件 2 工作故障待修；

状态 8：部件 2 工作故障在修理，部件 1 工作故障待修；

状态 9：部件 2 贮备故障在修理，部件 1 工作故障待修.

显然，系统的状态空间 $E=\{0,1,\cdots,9\}$，工作状态 $W=\{0,1,\cdots,5\}$，故障状态 $F=\{6,7,8,9\}$. 令 $X(t)=j$，若时刻 $t$ 系统处于状态 $j$， $j=0,1,\cdots,9$，可知 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是状态空间 $E$ 上的时齐马尔可夫过程，在 $\Delta t$ 时间内，系统由状态 $i$ 转移到状态 $j$ 的概率 $P_{ij}(\Delta t)=a_{ij}\Delta t+\circ(\Delta t)$，$i\ne j$，$i,j\in E$，其中 $a_{ii}=-\sum\limits_{i\ne j}a_{ij}$. 从而可得 $\Delta t$ 时间内系统不同状态之间的转移率矩阵 $A$ 为：

$$\begin{bmatrix}
-\lambda_1-v_2 & 0 & 0 & v_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\lambda_2-v_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\
w_2 & 0 & 0 & -\lambda_1-w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1\\
0 & \mu_1 & 0 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & w_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2-w_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_2
\end{bmatrix}.$$

对所有 $i,j\in E$，若 $\lim\limits_{t\to 0}P_{ij}(t)=\delta_{ij}$，则 $\lim\limits_{t\to 0}P_{ij}(t)=\pi_j$ 存在[3]. 此时系统的状态方程组为：

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_9)A=(0,0,\cdots,0)\\ \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_9=1\end{cases}. \tag{1}$$

## 3 状态方程组的求解

打开 Maple 11.0 软件，在其工作界面中输入以下程序：

restart:

with(linalg):

A:=matrix([[$-\lambda_1-\nu_2,0,\mu_2,w_2,0,0,0,0,0,0$],[$0,-\lambda_2-\nu_1,0,0,\mu_1,w_1,0,0,0,0$],

$[0,\lambda_2,-\lambda_1-\mu_2,0,0,0,\mu_1,w_1,0,0],[v_2,0,0,-\lambda_1-w_2,0,0,0,0,0,0],$

$[\lambda_1,0,0,0,,-\lambda_2-\mu_1,0,0,0,\mu_2,w_2],[0,v_1,0,0,0,-\lambda_2-w_1,0,0,0,0],$

$[0,0,0,0,\lambda_2,0,-\mu_1,0,0,0],[0,0,0,0,0,\lambda_2,0,-w_1,0,0],$

$[0,0,\lambda_1,0,0,0,0,0,-\mu_2,0],[0,0,0,\lambda_1,0,0,0,0,0,-w_2],$

[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]]);B:=vector([0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1])

S:=linsolve(A,B);

Simplify(S[1]);factor(S[1]); Simplify(S[2]);factor(S[2]); $\frac{S[2]}{S[1]}$

Simplify(S[3]);factor(S[3]); $\frac{S[3]}{S[1]}$ Simplify(S[4]);factor(S[4]); $\frac{S[4]}{S[1]}$

Simplify(S[5]);factor(S[5]); $\frac{S[5]}{S[1]}$ Simplify(S[6]);factor(S[6]); $\frac{S[6]}{S[1]}$

Simplify(S[7]);factor(S[7]); $\frac{S[7]}{S[1]}$ Simplify(S[8]);factor(S[8]); $\frac{S[8]}{S[1]}$

Simplify(S[9]);factor(S[9]); $\frac{S[9]}{S[1]}$ Simplify(S[10]);factor(S[10]); $\frac{S[10]}{S[1]}$

由此可解出系统的状态方程组（1）的解$\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_9$，但由于每个$\pi_i(i=0,1,\cdots,9)$的表达式都非常长，这里就不把$\pi_i(i=0,1,\cdots,9)$的具体表达式写出来，只给出$\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_9$与$\pi_0$的倍数关系，其结果为：

$$\pi_1=\frac{(\lambda_2+w_1)\mu_1\lambda_1(\lambda_1^2+\mu_2\lambda_1+\lambda_1w_2+\lambda_1v_2+\mu_2w_2+v_2\mu_2)}{\mu_2(\lambda_1+w_2)(\mu_1w_1+\lambda_2^2+v_1\mu_1+\lambda_2\mu_1+\lambda_2w_1+\lambda_2v_1)\lambda_2}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_2=\frac{\lambda_1(\lambda_1+w_2+v_2)}{\mu_2(\lambda_1+w_2)}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_3=\frac{v_2}{\lambda_1+w_2}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_4=\frac{(w_1+v_1+\lambda_2)\lambda_1(\lambda_1^2+\mu_2\lambda_1+\lambda_1w_2+\lambda_1v_2+\mu_2w_2+v_2\mu_2)}{\mu_2(\lambda_1+w_2)(\mu_1w_1+\lambda_2^2+v_1\mu_1+\lambda_2\mu_1+\lambda_2w_1+\lambda_2v_1)}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_5=\frac{\mu_1v_1\lambda_1(\lambda_1^2+\mu_2\lambda_1+\lambda_1w_2+\lambda_1v_2+\mu_2w_2+v_2\mu_2)}{\mu_2(\lambda_1+w_2)(\mu_1w_1+\lambda_2^2+v_1\mu_1+\lambda_2\mu_1+\lambda_2w_1+\lambda_2v_1)\lambda_2}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_6=\frac{\lambda_2(w_1+v_1+\lambda_2)\lambda_1(\lambda_1^2+\mu_2\lambda_1+\lambda_1w_2+\lambda_1v_2+\mu_2w_2+v_2\mu_2)}{\mu_2(\lambda_1+w_2)\mu_1(\mu_1w_1+\lambda_2^2+v_1\mu_1+\lambda_2\mu_1+\lambda_2w_1+\lambda_2v_1)}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_7=\frac{\mu_1v_1\lambda_1(\lambda_1^2+\mu_2\lambda_1+\lambda_1w_2+\lambda_1v_2+\mu_2w_2+v_2\mu_2)}{\mu_2(\lambda_1+w_2)(\mu_1w_1+\lambda_2^2+v_1\mu_1+\lambda_2\mu_1+\lambda_2w_1+\lambda_2v_1)}\pi_0\text{；}$$

$$\pi_8=\frac{\lambda_1^2(\lambda_1+w_2+v_2)}{(\lambda_1+w_2)\mu_2^2}\pi_0\text{；}\quad \pi_9=\frac{\lambda_1v_2}{(\lambda_1+w_2)w_2}\pi_0\text{.}$$

## 4 系统的可靠性指标

根据上面求得的$\pi_i(i=0,1,\cdots,9)$可得系统的各项可靠性指标.

系统可用度[4]：$A=\sum_{j\in W}\pi_j=\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5$ .

系统稳态故障频度：$M=\sum_{i\in W}\pi_i\sum_{j\in F}a_{ij}=\lambda_1(\pi_2+\pi_3)+\lambda_2(\pi_4+\pi_5)$ .

其中，$\{a_{ij}\},i,j=0,1,\cdots,9$为$\Delta t$时间内系统不同状态之间的转移率矩阵.

系统平均开工时间：$MUT=\dfrac{A}{M}=\dfrac{\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5}{\lambda_1(\pi_2+\pi_3)+\lambda_2(\pi_4+\pi_5)}$ .

系统平均停工时间：$MDT=\dfrac{\bar{A}}{M}=\dfrac{1-A}{M}=\dfrac{1-\pi_0-\pi_1-\pi_2-\pi_3-\pi_4-\pi_5}{\lambda_1(\pi_2+\pi_3)+\lambda_2(\pi_4+\pi_5)}$ .

系统平均周期：$MCT=\dfrac{1}{M}=\dfrac{1}{\lambda_1(\pi_2+\pi_3)+\lambda_2(\pi_4+\pi_5)}$ .

修理设备忙时的稳态概率：$B=\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_9$ .

若时刻 0 两个部件都是正常的，为求系统的可靠度$R(t)$或系统首次故障前时间分布$F(t)=1-R(t)$，我们令系统的所有故障状态为马尔可夫过程的吸收状态．在$P_{ij}(\Delta t)=a_{ij}\Delta t+\circ(\Delta t)$，$i,j\in E$，$i\neq j$中，$a_{ij},i,j\in E$，$i\neq j$是转移率矩阵$A$中的元素，令$a_{ij}=0$，$i\in F$，$j\in E$，这就构成了一个新的马尔可夫过程$\{\tilde{X}(t),t\geq 0\}$[5]．若令$Q_j(t)=P\{\tilde{X}(t)=j\}$，$j\in E$，则$\{Q_j(t),j\in E\}$满足微分方程：

$$(Q_W'(t),Q_F'(t))=(Q_{W(t)},Q_{F(t)})\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}=(Q_{W(t)},Q_{F(t)})\begin{bmatrix}B & C\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中，$B,C,D,E$为相应的矩阵$A$的分块形式，$Q_{W(t)}=(Q_0(t),Q_1(t),\cdots,Q_K(t))$，$Q_{F(t)}=(Q_{K+1}(t),\cdots,Q_N(t))$ .

若在初始时刻$t=0$，系统处于正常工作状态，且给定系统初始状态分布$Q_W(0)=[1,0,0,0,0,0]$，则$MTTFF=x_0+x_1+\cdots+x_K$，其中$x_0,x_1,\cdots,x_K$满足线性方程组$(x_0,x_1,\cdots,x_K)B=-Q_W(0)$，即

$$[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]\begin{bmatrix}-\lambda_1-\nu_2 & 0 & 0 & \nu_2 & \lambda_1 & 0\\ 0 & -\lambda_2-\nu_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \nu_1\\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & 0 & 0\\ w_2 & 0 & 0 & -\lambda_1-w_2 & 0 & 0\\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 & 0\\ 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2-w_1\end{bmatrix}$$

$$=[-1,0,0,0,0,0]$$

通过 Maple 11.0 软件，可解出 $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ 的值[6]，但由于解的表达式太长，这里就不给出具体解.

于是系统首次故障前平均时间为：$MTTFF = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ .

## 5 小　结

通过对以上系统模型的分析，可以看出当把部件工作故障后的修理时间分布与贮备故障后的修理时间分布看成两个不同的指数分布时，所得的结果在理论上应该是更符合实际情况的，也更具有实用性．当然，若贮备故障修理时间不是指数分布，而是一般分布时，运用上述方法，同样可求出系统的各项可靠性指标．可见，把本文的推导方法运用到一般情况，也是实用的.

**参考文献**


[1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 240-242.

[2] 刘仁彬, 唐应辉. 独立维修两个不同型部件冷储备系统可靠性分析[J]. 系统工程学报, 2006, 21(6): 628-635.

[3] Chung K L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities [M]. Berlin, New York: Springer, 1960: 106-107.

[4] 张元林. 两部件冷备系统的可靠性分析及其最优更换策略[J]. 高校应用数学学报, 1995, 10(1): 5-9.

[5] 唐应辉, 喻国建, 李晓东. 修理设备可更换且修理延迟的两同型部件并联可修系统[J]. 工程数学学报, 2005, 22(1): 1-8.

[6] 王玮明. 计算机代数系统与符号计算[M]. 兰州: 甘肃科学技术出版, 2004: 140-141.


# Reliability Analysis of Warm Standby Redundant Repairable System with Two Different Types Components


HU Zhaohong, CHEN Xizhen

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China　325035)



**Abstract:** Suppose that switches were completely reliable and service life of components, shelf-life, repair time after the breakdown and standby fault were all subjected to different types of exponential distribution, a warm standby redundant repairable system that composed by two different types of components and a repair equipment was studied. With the help of the research method which is based on Markov repairable system and Maple 11.0 software, the expressions of the average time before the first failure, availability, fault frequency and other reliability indicators are obtained.



**Key words:** Warm Standby Redundant Repairable System; Exponential Distribution; Reliability


（编辑：王一芳）