第 28 卷第 6 期　　温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版　　2007 年 12 月
Vol 28, No 6　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Dec, 2007

# 混合单调算子方程组解的存在唯一性定理

王宇翔

（大同大学，山西大同　037003）

**摘　要**：利用锥的有关理论和单调迭代技巧，讨论了一类混合单调算子方程组，得到其解的存在唯一性定理，所得结果推广了有关文献中相应的结论.

**关键词**：锥；不动点；混合单调算子

**中图分类号**：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2007)06-0021-04

## 1 预备知识

关于混合单调算子的研究，已有许多好的结果．本文研究了非对称广义压缩型混合单调算子方程组的解的存在性和唯一性，推广了文献[1]和[2]的结果，得到了更一般的结论，并证明了相应的不动点定理.

本文假定 $E$ 是实 Banach 空间，$P$ 是 $E$ 中正规锥，设 $u_0,v_0\in E$，$u_0\le v_0$，称 $[u_0,v_0]=\{x\in E\mid u_0\le x\le v_0\}$ 为 $E$ 中序区间[3]；算子 $A:[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]\to E$ 称为混合单调的，如果 $A(u,v)$ 关于 $u$ 非减且关于 $v$ 非增，即对任何 $u_i,v_i\in[u_0,v_0]$，$i=1,2$，若 $u_1\le u_2$，$v_2\le v_1$，则 $A(u_1,v_1)\le A(u_2,v_2)$[4]；$x^*\in D$ 称为 A 的不动点，如果 $A(x^*,x^*)=x^*$ 成立[4].

## 2 主要结论

定理　设 $E$ 是实的 Banach 空间，$P$ 是 $E$ 中的正规锥，$N$ 为正规常数，$A,B:[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]\to E$ 是两个混合单调算子且满足下列条件：

（I）存在单调增函数 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,5):(0,+\infty)\to(0,1)$，$\forall\, u,v\in[u_0,v_0]$，若 $u,v$ 可比较，则有 $\|A(v,u)-B(u,v)\|\le a_1(\|v-u\|)\|v-u\|+a_2(\|v-u\|)\|B(u,v)-u\|+a_3(\|v-u\|)\|A(v,u)-v\|$；

（II）记 $\beta=\sum_{i=1}^{3}a_i(N\|v_0-u_0\|)$，满足 $\beta<\dfrac{1}{N+1}$，且存在 $0<\alpha_1+\alpha_2<\dfrac{1-\beta N}{1+\beta}<1$ 满足：$u_0+\alpha_1(v_0-u_0)\le B(u_0,v_0)$，$A(v_0,u_0)\le v_0-\alpha_2(v_0-u_0)$；

（III）$B(v,u)\le A(v,u)$，$u_0\le u\le v\le v_0$；

则

（i）算子方程组

---

**收稿日期**：2007-03-09

**作者简介**：王宇翔(1970- )，女，山西大同人，讲师，硕士，研究方向：非线性泛函分析，高等数学教学

$$\begin{cases} A(u,u)=u \\ B(u,u)=u \end{cases} \tag{1}$$

在$[u_0,v_0]$上有唯一公共解$u*$，而且迭代序列

$$\begin{cases} u_{n+1}=B(u_n,v_n)-\alpha_1(v_n-u_n) \\ v_{n+1}=A(v_n,u_n)+\alpha_2(v_n-u_n) \end{cases} \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{2}$$

都收敛于$u*$，且有误差估计式

$$\begin{cases} \| u_n-u* \| \le N[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n \| v_0-u_0 \| \\ \| v_n-u* \| \le N[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n \| v_0-u_0 \| \end{cases} \tag{3}$$

（ii）对任意的$(x_0,y_0)\in[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]$且$x_0\le y_0$，作迭代序列

$$x_{n+1}=B(x_n,y_n),\ y_{n+1}=A(y_n,x_n) \qquad n=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{4}$$

都有$\| x_n-u* \|\to 0$，$\| y_n-u* \|\to 0\ (n\to\infty)$，且有误差估计式

$$\begin{cases} \| x_n-u* \| \le 2N[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n \| v_0-u_0 \| \\ \| y_n-u* \| \le 2N[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n \| v_0-u_0 \| \end{cases}$$

证明 (1) 由数学归纳法容易证明

$$u_{n-1}\le u_n\le v_n\le v_{n-1},\ n=1,\ 2,\cdots \tag{5}$$

事实上，$n=1$时，由条件（II），（III）有

$$u_0\le B(u_0,v_0)-\alpha_1(v_0-u_0)=u_1\le B(u_0,v_0)+\alpha_2(v_0-u_0)$$
$$\le B(v_0,u_0)+\alpha_2(v_0-u_0)\le A(v_0,u_0)+\alpha_2(v_0-u_0)=v_1\le v_0$$

假设$n=k$时（5）式成立，即有$u_{k-1}\le u_k\le v_k\le v_{k-1}$，则当$n=k+1$时

$$u_k=B(u_{k-1},v_{k-1})-\alpha_1(v_{k-1}-u_{k-1})\le B(u_k,v_k)-\alpha_1(v_k-u_k)=u_{k+1}$$
$$\le B(v_k,u_k)+\alpha_2(v_k-u_k)\le A(v_k,u_k)+\alpha_2(v_k-u_k)=v_{k+1}$$
$$\le A(v_{k-1},u_{k-1})+\alpha_2(v_{k-1}-u_{k-1})=v_k$$

(2) 证明$\{u_n\},\{v_n\}$均为 Cauchy 列.

由（2）式有

$$v_n-u_n=A(v_{n-1},u_{n-1})-B(u_{n-1},v_{n-1})+(\alpha_1+\alpha_2)(v_{n-1}-u_{n-1})$$

因此，

$$\| v_n-u_n \| = \| A(v_{n-1},u_{n-1})-B(u_{n-1},v_{n-1})+(\alpha_1+\alpha_2)(v_{n-1}-u_{n-1}) \|$$
$$\le \| A(v_{n-1},u_{n-1})-B(u_{n-1},v_{n-1}) \| +(\alpha_1+\alpha_2) \| (v_{n-1}-u_{n-1}) \|$$

而由条件（I）有

$$\| A(v_{n-1},u_{n-1})-B(u_{n-1},v_{n-1}) \| \le a_1(\| v_{n-1}-u_{n-1} \|) \| v_{n-1}-u_{n-1} \| +a_2(\| v_{n-1}-u_{n-1} \|)\cdot$$
$$\| B(u_{n-1},v_{n-1})-u_{n-1} \| +a_3(\| v_{n-1}-u_{n-1} \|) \| A(v_{n-1},u_{n-1})-v_{n-1} \|$$
$$=a_1(\| v_{n-1}-u_{n-1} \|) \| v_{n-1}-u_{n-1} \| +a_2(\| v_{n-1}-u_{n-1} \|) \| u_n-u_{n-1}+\alpha_1(v_{n-1}-u_{n-1}) \|$$
$$+a_3(\| v_{n-1}-u_{n-1} \|) \| v_n-v_{n-1}-\alpha_2(v_{n-1}-u_{n-1}) \|$$

再由$P$正规，有$\theta\le u_n-u_{n-1}\le v_{n-1}-u_{n-1}\Rightarrow \| u_n-u_{n-1} \| \le N \| v_{n-1}-u_{n-1} \|$，

$$\theta\le v_{n-1}-v_n\le v_{n-1}-u_{n-1}\Rightarrow \| v_{n-1}-v_n \| \le N \| v_{n-1}-u_{n-1} \|$$

因此，

$$\begin{aligned}
\|v_n-u_n\| &\le \|A(v_{n-1},u_{n-1})-B(u_{n-1},v_{n-1})\|+(\alpha_1+\alpha_2)\|v_{n-1}-u_{n-1}\| \\
&\le a_1(\|v_{n-1}-u_{n-1}\|)+a_2(\|v_{n-1}-u_{n-1}\|)(N+\alpha_1)+a_3(\|v_{n-1}-u_{n-1}\|)(N+\alpha_2) \\
&\quad +(\alpha_1+\alpha_2)\|v_{n-1}-u_{n-1}\| \\
&\le \sum_{i=1}^{3}a_i(\|v_{n-1}-u_{n-1}\|)\cdot(N+\alpha_1+\alpha_2)\cdot\|v_{n-1}-u_{n-1}\|+(\alpha_1+\alpha_2)\|v_{n-1}-u_{n-1}\| \\
&\le \sum_{i=1}^{3}a_i(N\|v_0-u_0\|)\cdot(N+\alpha_1+\alpha_2)\cdot\|v_{n-1}-u_{n-1}\|+(\alpha_1+\alpha_2)\|v_{n-1}-u_{n-1}\| \\
&= [\beta(N+\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_2)]\|v_{n-1}-u_{n-1}\| \\
&= [\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^2\|v_{n-2}-u_{n-2}\|\le\cdots \qquad (6)\\
&\le [\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n\|v_0-u_0\|
\end{aligned}$$

由条件（II）知：0＜ $\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)$ ＜1．而对于任意自然数 $p$ 有：

$$\theta\le u_{n+p}-u_n\le v_n-u_n \qquad (7)$$

$$\theta\le v_n-v_{n+p}\le v_n-u_n \qquad (8)$$

于是由（6）、（7）、（8）三式及 $P$ 正规，得：

$$\|v_n-u_n\|\le[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n\|v_0-u_0\| \qquad (9)$$

$$\|u_{n+p}-u_n\|\le N\|v_n-u_n\|\le N[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n\|v_0-u_0\| \qquad (10)$$

$$\|v_n-v_{n+p}\|\le N\|v_n-u_n\|\le N[\beta N+(1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)]^n\|v_0-u_0\|, \qquad (11)$$

上式表明 $\{u_n\},\{v_n\}$ 均为 $E$ 中的 Cauchy 列，因此存在 $u,v\in E$，使得 $\lim_{n\to\infty}u_n=u$，$\lim_{n\to\infty}v_n=v$ 且 $u_{n-1}\le u\le v\le v_{n-1}$.

由 $P$ 正规及（9）式可得，$u=v\in[u_0,v_0]$．令 $u^*=u$，则

$$u_n\le u^*\le v_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots \qquad (12)$$

(3) 证明 $u^*$ 即为方程组（1）在 $[u_0,v_0]$ 中的唯一公共解.

由条件（III）及 A，B 的混合单调性并注意到（12）式，有

$$\begin{aligned}
&u_n\le u_{n+1}\le u_{n+1}+\alpha_1(v_n-u_n)=B(u_n,v_n)\le B(u^*,u^*)\\
&\le A(u^*,u^*)\le A(v_n,u_n)=v_{n+1}-\alpha_2(v_n-u_n)\le v_{n+1}\le v_n
\end{aligned}$$

即：

$$u_n\le B(u^*,u^*)\le A(u^*,u^*)\le v_n \qquad (13)$$

于是由 $u_n\to u^*$，$v_n\to u^*(n\to+\infty)$ 及 $P$ 正规并（13）式可得 $A(u^*,u^*)=B(u^*,u^*)=u^*$，从而 $u^*$ 是方程组（1）在 $[u_0,v_0]$ 中的公共解.

设 $v^*$ 是方程组（1）在 $[u_0,v_0]$ 中的另一个公共解，则由（2）式，条件（III）及 $A$，$B$ 的混合单调性，易得

$$u_n\le v^*\le v_n \qquad (14)$$

又由 $u_n\to u^*,v_n\to u^*(n\to\infty)$ 及 $P$ 正规即得，$u^*=v^*$.

(4) 在（10），（11）式中，令 $p\to+\infty$，即得误差估计式（3）.

(5) 证明 $x_n\to u^*$，$y_n\to u^*$．$(n\to\infty)$

考察迭代序列（4），由 $u_0\le x_0\le y_0\le v_0$，条件（II）及 $A$，$B$ 混合单调，用数学归纳法易

证$u_n \le x_n \le y_n \le v_n$， $n = 0,1,2,\cdots$，从而$\theta \le x_n - u_n \le v_n - u_n$，故

$$\| x_n - u_n \| \le N \| v_n - u_n \| \le N[\beta N + (1+\beta)(\alpha_1 + \alpha_2)]^n \| v_0 - u_0 \|$$

而

$$\| u_n - u^* \| \le N[\beta N + (1+\beta)(\alpha_1 + \alpha_2)]^n \| v_0 - u_0 \|$$

因此，

$$\| x_n - u^* \| \le \| x_n - u_n \| + \| u_n - u^* \| \le 2N[\beta N + (1+\beta)(\alpha_1 + \alpha_2)]^n \| v_0 - u_0 \|$$

即：

$$x_n \to u^* \ (n \to +\infty) .$$

同理可得：$y_n \to u^* \ (n \to +\infty)$ .

**参考文献**

[1] 颜心力. 对称压缩算子方程解的存在与唯一性定理及应用[J]. 科学通报, 1990, (10): 733-735.

[2] 李凤友, 刘斌. 混合单调算子方程解的存在与唯一性定理[J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 1993, (3): 1-6.

[3] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版社, 1985. 235-244.

[4] Guo D J. Positive fixed points and eigenvectors of noncompact decreasing operators with applications to nonlinear integral equations [J]. Chin Ann of Math, 1993, 14B(4): 419-426.

# The Existence and Uniqueness of Solutions for the Systems of Mixed Monotone Operator Equations

WANG Yuxiang

(Datong University, Datong, China 037003)

**Abstract:** By the cone theory and monotone iterative technique, this paper discusses a class of mixed monotone operator equations, and the existence uniqueness of solutions is obtained for the systems of mixed monotone operator equations. The result presented here are the essential improvement for the corresponding results.

**Key words:** Cone; Fixed point; Mixed monotone operato

（编辑：王一芳）