第 30 卷第 6 期
2009 年 11 月
宇 航 学 报
Journal of Astronautics
Vol.30 No.6
November 2009

广义 Weibull 分布参数的收缩估计

洪东跑，赵 宇，马小兵
（北京航空航天大学工程系统工程系，北京 100191）

摘 要：在右删失样本下,研究了双参数广义 Weibull 分布参数的极大似然估计。针对在小样本或高度删失样本下参数估计效果差的问题,引入了收缩估计方法,将先验信息与样本信息相结合,用于改善参数估计。分别在单参数和双参数含有先验信息两种情形下,给出了分布参数的收缩估计。以定数截尾样本为例,利用 Monte-Carlo 方法对收缩估计与极大似然估计进行了比较,模拟结果表明在一定的条件下,收缩估计具有更优的统计性质。数值算例表明,在小样本或高度截尾样本下,双参数广义 Weibull 分布参数的收缩估计具有较好的效果。

关键词：可靠性；广义 Weibull 分布；收缩估计；先验信息；样本信息
中图分类号：TB114.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2009)06-2442-05
DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2009.06.064

0 引言

Weibull 分布是常用的寿命分布之一,在可靠性数据分析中应用十分广泛。传统 Weibull 分布的失效率为幂函数形式,只能分析失效率为单调变化趋势的故障数据[1]。然而在对复杂系统和脆性材料等产品的故障数据研究中发现,其失效率函数通常呈现出浴盆曲线的形态[2,3]。对此,国内外学者提出了一类广义 Weibull 分布族用于描述失效率为浴盆曲线的产品的寿命,并给出了相应地统计推断[4-5]。由于经典的统计方法通常只利用样本信息对总体参数进行推断,在小样本或高度删失样本下,即在样本失效数较少时,Weibull 分布参数估计效果往往较差[6]。在大多数情况下,除了样本信息之外,产品还存在先验信息。先验信息主要来源于相似产品信息或工程经验,可以作为样本信息的补充。将样本信息与先验信息相结合,在一定程度上可以改善统计推断结果[7]。从 1970 年开始,关于利用先验信息估计 Weibull 分布参数的方法有了较多的研究[8],主要分为 Bayes 方法[9],经验 Bayes 方法[10]和收缩估计方法[11]。与 Bayes 方法类似,收缩估计也将先验信息与样本信息相结合,用于改善参数估计。对于传统 Weibull 分布参数的收缩估计,国内外学者进行了较多的研究,并取得了显著的成果[12-15]。

收稿日期:2008-12-15； 修回日期:2009-02-20
基金项目:总装预研重点基金(9140A19030106HK0108)

本文研究了双参数广义 Weibull 分布的参数估计,给出了右删失样本下参数的收缩估计,并讨论了其统计性质。

1 广义 Weibull 分布及参数估计

广义 Weibull 分布的一般形式为[2-5]

$$F(x) = 1 - \exp[-aG(x)], x \geqslant 0 \quad (1)$$

当 $G(x) = x^b$ 时,式(1)即为传统的双参数 Weibull 分布;当 $G(x) = \exp(x^b) - 1$ 时,代入式(1)可得

$$F(x) = 1 - \exp\{a[1 - \exp(x^b)]\}, x \geqslant 0 \quad (2)$$

其中 $a > 0, b \geqslant 0$。式(2)为常见的双参数广义 Weibull 分布[1],主要用于描述失效率为浴盆曲线的产品寿命,其密度函数为

$$f(x) = abx^{b-1}\exp(x^b)\exp\{a[1 - \exp(x^b)]\}, x \geqslant 0 \quad (3)$$

假设产品的寿命服从式(2)的双参数广义 Weibull 分布,其试验数据记为

$$(x_i, \delta_i) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \quad (4)$$

其中 δ_i 只取 0 或 1, $\delta_i = 1$ 表示 x_i 是失效样本, $\delta_i = 0$ 表示 x_i 是右删失样本。样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 对应的似然函数为

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n}\left(f(x_i)^{\delta_i}(1 - F(x_i))^{1-\delta_i}\right) \quad (5)$$

由式(5)的样本似然函数可得参数的极大似然估计 $(\hat{a},\hat{b})$，由于没有解析解，一般可利用数值方法求解。以定数截尾样本为例，假设样本量为 n，其中截尾样本数记为 n_0，数值模拟结果表明，当 n 较小，估计 $(\hat{a},\hat{b})$ 效果不甚理想，且 n 固定时，截尾数 n_0 越大，估计 $(\hat{a},\hat{b})$ 效果越差。

2　单参数的收缩估计

设 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 基于样本信息的任意一个估计，当试验样本量有限时，$\hat{\theta}$ 往往估计效果不甚理想。而在可靠性数据分析中，根据相似产品信息或工程经验等先验信息，可以对产品的分布参数有一种初步估计。这种估计在一定程度上包含了参数真值信息，一般称之为先验估计，记为 θ_0。引入收缩估计方法，综合利用先验信息与样本信息，用于改善估计 $\hat{\theta}$。首先利用样本信息对先验估计进行检验，即检验如下假设

$$H_0:\theta = \theta_0 \qquad H_1:\theta \neq \theta_0 \tag{6}$$

在一定的显著水平 α 下，如果接受原假设 H_0，则令 $\tilde{\theta} = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_0$，否则令 $\tilde{\theta} = \hat{\theta}$。$\tilde{\theta}$ 即为收缩估计，其中 $k(0 < k < 1)$ 为收缩系数，它反映了使用者对先验估计 θ_0 的相信程度。如果接受原假设 H_0，则认为先验估计 θ_0 确实提供了参数真值信息，需要对 $\tilde{\theta}$ 中的 θ_0 做适当的收缩。

先考虑两个参数 (a,b) 中只有一个存在先验估计的情形。假设 a 存在先验估计 a_0，则式(6)的假设检验变为

$$H_0:a = a_0 \qquad H_1:a \neq a_0 \tag{7}$$

要检验式(7)的假设，可用似然比统计量 $\lambda = -2\ln\dfrac{L(a_0,\tilde{b})}{L(\hat{a},\hat{b})}$，$\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 为极大似然估计，$\tilde{b}$ 为 $a = a_0$ 时的极大似然估计。当 H_0 成立时，在一定条件下，λ 近似服从 χ^2 分布(自由度为 1)，因此可以用 λ 检验假设 H_0。在给定显著水平 α 下，如果 $\chi^2_{1,\alpha/2} \leqslant \lambda \leqslant \chi^2_{1,1-\alpha/2}$，则不能拒绝原假设 H_0，其中 $\chi^2_{k,p}$ 为自由度为 k 的 χ^2 分布的 p 分位点。结合假设检验，可以给出参数 a 的收缩估计

$$\tilde{a} = \begin{cases}(1-k)a_0 + k\hat{a} & \chi^2_{1,\alpha/2} \leqslant \lambda \leqslant \chi^2_{1,1-\alpha/2} \\ \hat{a} & \lambda < \chi^2_{1,\alpha/2} \text{ or } \lambda > \chi^2_{1,1-\alpha/2}\end{cases} \tag{8}$$

收缩系数 k 是未知的，一般通过使收缩估计的均方误差最小来确定。但由于需要确定收缩估计的均方误差解析表达式，而且计算较为复杂，为此本文利用 χ^2 分布的分位点来确定 k

$$k = \frac{|\lambda - (\chi_{1,\alpha/2} + \chi_{1,1-\alpha/2})/2|}{(\chi_{1,1-\alpha/2} - \chi_{1,\alpha/2})/2} \tag{9}$$

为了研究该参数收缩估计的性质及效果，利用 Monte-Carlo 方法进行数值模拟。以定数截尾试验数据为例，取 $a = 0.01, b = 0.5$，利用计算机产生一组样本量为 n 且失效数为 r 的随机数，对该随机数进行统计分析可得参数的极大似然估计 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$。取先验估计 $a_0 = \rho a$，在给定显著水平 α 下，由该随机数可得参数 a 的收缩估计 $\tilde{a}$。重复模拟 N 次，分别可得 $\hat{a}$ 和 $\tilde{a}$ 均方误差的估计 $\hat{m} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{a}-a)^2$ 和 $\tilde{m} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{a}-a)^2$。假设 $n = 10$ 和 $\alpha = 0.05$，取 $r = (10,8,6,4)$ 和 $\rho = (0.2,0.4,\cdots,2.4)$ 进行组合，分别模拟 5000 次，并计算各种组合下的 $\hat{m}$ 和 $\tilde{m}$，记 $\lambda = \hat{m}/\tilde{m}$，模拟数据如表 1。

表 1　参数 a 收缩估计模拟结果

Table 1　Simulation of shrinkage estimation of a

r	ρ											
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
10	0.93	1.18	1.52	1.92	2.11	2.29	2.23	1.96	1.75	1.40	1.16	1.04
8	0.97	1.25	1.68	2.01	2.32	2.30	2.50	2.03	1.83	1.58	1.30	1.17
6	1.03	1.45	2.05	2.53	2.90	2.64	2.45	2.10	1.93	1.50	1.23	1.07
4	1.15	1.59	2.06	2.43	2.58	2.84	2.42	2.36	1.92	1.54	1.38	1.08

对表 1 的数据进行统计分析可知：

(1) 当 $0.4 \leqslant \rho \leqslant 2.4$ 且 $4 \leqslant r \leqslant 10$ 时，$\lambda > 1$，即从均方误差的意义上，此时参数 a 的收缩估计优于极大似然估计，当 $\rho = 0.2$ 且 $8 \leqslant r \leqslant 10$ 时，$\lambda < 1$，即此时参数 a 的收缩估计不如极大似然估计。

(2) 当样本量 n 与失效数 r 固定时，λ 随 ρ 先递

增再递减，当 ρ 接近 1 时，λ 最大，即先验信息 a_0 越接近真值，收缩估计效果越好。由于试验样本量较小，在检验先验估计的时候会出现一定的偏差，当 ρ 很小或者很大的时候，检验并不能完全拒绝该先验估计，此时收缩估计不如极大似然估计。

(3) 当样本量固定且 $0 < \rho < 1$ 时，失效数越大，λ 随着 ρ 的变小下降速度越快，而且对 ρ 的取值范围要求越严。比如当 $r \leqslant 6$ 且 $\rho = 0.2$ 时，$\lambda > 1$，而当 $8 \leqslant r \leqslant 10$ 且 $\rho = 0.2$ 时，$\lambda < 1$。对于相同的样本量，失效数越大，参数的极大似然估计越精确，因此对先验估计的精确性要求也越高。

综上所述可知，对于定数截尾样本或完全失效样本，当参数 a 存在合适的先验估计时，其收缩估计从均方误差的意义上要优于极大似然估计，而且先验估计越精确，收缩估计效果越好。因此在利用收缩估计时，要尽可能获得较精确的先验估计。

3 双参数的收缩估计

前文讨论了只有一个参数存在先验估计时该参数的收缩估计，收缩估计方法及原理同样适用于两个参数 (a, b) 同时存在先验估计的情形。记 $\boldsymbol{\beta} = (a, b)^T$，其先验估计记为 $\boldsymbol{\beta}_0 = (a_0, b_0)^T$，同样在构建收缩估计时需要对先验估计进行假设检验，则式(6)的假设检验变为

$$H_0: \beta = \beta_0 \qquad H_1: \beta \neq \beta_0 \tag{10}$$

为了检验式(10)的假设，同样可用似然比统计量 $\lambda = -2\ln\dfrac{L(\beta_0)}{L(\hat{\beta})}$，其中 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{a}, \hat{b})^T$ 为极大似然估计。当 H_0 成立时，在一定条件下，λ 近似服从 χ^2 分布（自由度为 2）。在给定显著水平 α 下，如果 $\chi^2_{2,\alpha/2} \leqslant \hat{\lambda} \leqslant \chi^2_{2,1-\alpha/2}$，则不能拒绝原假设 H_0。同样结合假设检验，可以给出 $\boldsymbol{\beta} = (a, b)^T$ 的收缩估计

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} (1-k)\beta_0 + k\hat{\beta} & \chi^2_{2,\alpha/2} \leqslant \lambda \leqslant \chi^2_{2,1-\alpha/2} \\ \hat{\beta} & \lambda \leqslant \chi^2_{2,\alpha/2} \text{ or } \chi^2_{2,1-\alpha/2} \leqslant \lambda \end{cases} \tag{11}$$

由于收缩系数 k 是未知的，与单参数收缩系数的确定方法类似，χ^2 分布的分位点来确定收缩系数，对式(9)进行变换可得

$$k = \frac{|\lambda - (\chi_{2,\alpha/2} + \chi_{2,1-\alpha/2})/2|}{(\chi_{2,1-\alpha/2} - \chi_{2,\alpha/2})/2} \tag{12}$$

类似地利用 Monte-Carlo 方法进行数值模拟，研究双参数收缩估计的性质及效果。以定数截尾样本为例，取 $a = 0.01$，$b = 0.5$，取先验估计 $a_0 = \rho_1 a$ 和 $b_0 = \rho_2 b$。记参数的极大似然估计为 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$，收缩估计为 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$，其均方误差的估计为 $\hat{m}_a$、$\tilde{m}_a$、$\hat{m}_b$ 和 $\tilde{m}_b$。假设 $n = 10$ 和 $\alpha = 0.05$，取 $r = 4$，$\rho_2 = (0.6, 0.4, \cdots, 1.4)$ 和 $\rho_1 = (0.6, 0.4, \cdots, 1.4)$ 进行组合，分别模拟 5000 次，并计算各种组合下的 $\hat{m}_a$、$\tilde{m}_a$、$\hat{m}_b$ 和 $\tilde{m}_b$，记 $\lambda_a = \hat{m}_a/\tilde{m}_a$ 和 $\lambda_b = \hat{m}_b/\tilde{m}_b$，模拟数据如表 2，表中的数据为 $\lambda_a(\lambda_b)$。

表 2 双参数收缩估计模拟结果

Table 2 Simulation of shrinkage estimation of two parameters

ρ_1	ρ_2						
	0.6	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.4
0.6	1.04(0.98)	2.04(1.08)	2.25(1.94)	1.56(1.24)	1.12(1.14)	1.02(1.03)	1.01(1.00)
0.8	1.27(0.88)	2.64(1.23)	2.80(2.00)	1.39(1.40)	1.12(1.09)	1.02(1.02)	1.00(1.00)
0.9	1.48(0.79)	2.81(1.26)	2.65(1.86)	1.33(1.30)	1.08(1.06)	1.04(1.01)	1.00(1.00)
1.0	1.64(0.73)	2.95(1.29)	2.73(1.79)	1.30(1.27)	1.07(1.05)	1.02(1.01)	1.00(1.00)
1.1	1.74(0.67)	2.98(1.34)	2.50(1.64)	1.25(1.18)	1.05(1.03)	1.01(1.01)	1.00(1.00)
1.2	1.83(0.63)	3.17(1.33)	2.36(1.54)	1.25(1.18)	1.04(1.05)	1.02(1.01)	1.00(1.00)
1.4	2.01(0.57)	3.32(1.32)	1.74(1.42)	1.13(1.11)	1.02(1.02)	1.00(1.01)	1.00(1.00)

对表 2 的数据进行统计分析可知：

(1) 当 $0.6 \leqslant \rho_1 \leqslant 1.4$ 且 $0.6 \leqslant \rho_2 \leqslant 1.4$ 时，$\lambda_a \geqslant 1$，即此时收缩估计 $\tilde{a}$ 要优于极大似然估计 $\hat{a}$。当 $0.6 \leqslant \rho_1 \leqslant 1.4$ 且 $0.8 \leqslant \rho_2 \leqslant 1.4$ 时，$\lambda_b \geqslant 1$，即此时收缩估计 $\tilde{b}$ 要优于极大似然估计 $\hat{b}$，而当 $0.6 \leqslant \rho_1 \leqslant 1.4$ 且 $\rho_2 = 0.6$ 时，$\lambda_b < 1$，即此时 $\tilde{b}$ 不如极大似然估计 $\hat{b}$。

(2) 当 ρ_1 固定时，λ_a 和 λ_b 均随着 ρ_2 先递增再递减，并趋于 1，即当 ρ_2 较大时，检验将拒绝先验估计，收缩估计与极大似然估计趋于一致，同理当 ρ_2 较小时，检验将拒绝先验估计，收缩估计也与极大似然估计趋于一致。

(3) 对 λ_a 和 λ_b 进行比较分析可知,总体上参数 a 的收缩估计的效果要好于参数 b,而且前者对先验估计要求也相对较低。

综上所述可知,对于定数截尾样本或完全失效样本,当参数 a 和参数 b 存在合适的先验信息时,其收缩估计从均方误差的意义上要优于极大似然估计,而且先验估计越精确,收缩估计效果越好。但是与单参数收缩估计相比,双参数收缩估计对先验估计精确性的要求更高。

4　数值算例

利用 Monte-Carlo 方法产生一组服从双参数广义 Weibull 分布的定数截尾样本 $\boldsymbol{X} = (2.50, 3.26, 11.09, 21.50, 33.54, 34.60, *, *, *, *)$, 其中样本量 $n = 10$ 和失效数 $r = 6$, 参数的真值为 $a = 0.01$ 和 $b = 0.5$。利用式(5)可得参数的极大似然估计 $\hat{a} = 0.022$ 和 $\hat{b} = 0.368$。

(1) 假设只有参数 a 存在先验估计 $a_0 = 1.2a$, 显著水平 $\alpha = 0.05$, 则有 $\chi_{1,\alpha/2} = 0.001$ 和 $\chi_{1,1-\alpha/2} = 5.03$。利用参数的极大似然估计和先验估计可得似然比值 $\lambda = 1.89$, 由于 $\chi_{1,\alpha/2} < \lambda < \chi_{1,1-\alpha/2}$, 检验不能拒绝式(7)中的原假设 H_0。利用式(9)可得收缩系数 $k = 0.25$, 代入式(8)可得参数 a 的收缩估计 $\tilde{a} = 0.015$。假设只有参数 b 存在先验估计: $b_0 = 0.9b$, 显著水平 $\alpha = 0.05$, 计算可得似然比值 $\lambda = 1.27$, 同样由于 $\chi_{1,\alpha/2} < \lambda < \chi_{1,1-\alpha/2}$, 检验不能拒绝式(7)中的原假设 H_0。计算可得收缩系数 $k = 0.50$, 收缩估计 $\tilde{b} = 0.41$。

(2) 假设参数 a 和 b 都存在先验估计: $a_0 = 1.2a$ 和 $b_0 = 0.9b$, 显著水平为 $\alpha = 0.05$, 则有 $\chi_{2,\alpha/2} = 0.05$ 和 $\chi_{2,1-\alpha/2} = 7.38$。利用参数的极大似然估计和先验估计可得似然比值 $\lambda = 3.72$, 因此检验不能拒绝式(10)中的原假设 H_0。利用式(12)可得收缩系数 $k = 0.002$, 代入式(11)可得双参数的收缩估计 $\tilde{a} = 0.012$ 和 $\tilde{b} = 0.450$。

由上述算例可知,当存在适当的先验估计时,收缩估计要优于极大似然估计,且双参数的收缩估计要优于单参数的。

5　结论

针对在小样本或高度删失样本下,Weibull 分布参数估计效果差的问题,本文利用经典统计方法将先验信息与样本信息相结合,给出了双参数广义 Weibull 分布参数的收缩估计。在单参数含有先验信息和双参数都含有先验信息的两种情形下,分别给出了参数的收缩估计。数值模拟及数值算例表明,在小样本或高度截尾样本下,当参数存在适当的先验估计时,其收缩估计具有更优的统计性质。而且先验估计越精确,收缩估计的效果越好。因此在可靠性数据分析中,当试验失效数较小时,收缩估计方法可用于提高参数估计的精确性与稳定性,而且计算简单,便于工程应用。

参考文献:

[1] 马小兵,赵宇. 含位置参数的广义 Weibull 分布及其置信限估计[J].系统工程与电子技术,2008,30(4): 777 - 779.[MA Xiao-bing, ZHAO Yu. Estimation of confidence limits for generalized Weibull distribution including location parameter[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(4): 777 - 779(in Chinese).]

[2] Xie M, Tang Y, Goh T N. A modified weibull extension with bathtub-shaped failure rate function[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2002, 76:279 - 285.

[3] Gurvieh M R, Dibenedetto A T, Rande S V. A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials[J]. Journal of Materials Science, 1997,32: 2559 - 2564.

[4] Wu J W, Lu H L, Chen C H, et al. Statistical inference about the shape parameter of the new two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2004, 20:607 - 616.

[5] Nadarajah S, Kotz S. On some recent modifications of Weibull distribution[J]. IEEE Transaction on Reliability, 2005, 54(4):561 - 562.

[6] 李进,黄敏,赵宇. 威布尔分布的极大似然估计的精度分析[J].北京航空航天大学学报,2006,32(8):930 - 932.[LI Jin, HUANG Min, ZHAO Yu. Analysis of precision for maximum likelihood estimation in the weibull distribution[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(8): 930 - 932(in Chinese).]

[7] Singh H P, Saxena S, Joshi H. A family of shrinkage estimators for weibull shape parameter in censored sampling[J]. Statistical Papers, 2008, 49(1):513 - 529.

[8] Johnson N L, Kotz S, Balakrishnan N. Continuous Univariate Distributions[M]. Wiley, Singapore, 2004,1.

[9] Kaminskiy M P, Krivtsov V V. A simple procedure for Bayesian estimation of the Weibull distribution[J]. IEEE Transaction on Reliability, 2005, 54(4): 612 - 616.

[10] Dey D K, Kuo L. A new empirical Bayes estimator with Type-II cen-

sored data. Computational Statistics & Data Analysis, 1991, 12:271 – 279.

[11] Pandey B N, Malik H J, Srivastava R. Shrinkage testimators for the shape parameter of Weibull distribution under type II censoring[J]. Communications in statistics. Theory and methods, 1989, 19:1175 – 1199.

[12] Singh H P, Shukla S K. Estimation in the two-parameter Weibull distribution with prior information[J]. IAPQR Trans, 2000, 25(2):107 – 118.

[13] Pandey M, Singh U S. Shrunken estimators of Weibull shape parameter from Type-II censored samples[J]. IEEE Transaction on Reliability, 1993, 42:81 – 86.

[14] Chandra N K, Chandhuri A. On the efficiency of a testimator for the Weibull shape parameter[J]. Communications in Statistics. Theory and Methods, 1990, 19:1247 – 1259.

[15] 费鹤良,韩柏昌,陈迪. Weibull 分布形状参数的收缩估计[J]. 应用概率统计,1997, 13(1):27 – 36. [FEI He-liang, HAN Bai-chang, CHEN Di. Shrinkage estimation for the shape parameter of Weibull distribution under type II censoring[J]. Chinese journal of applied probability and statistics, 1997, 13(1):27 – 36(in Chinese).]

作者简介:洪东跑(1983 –),男,博士研究生,从事可靠性统计研究。

通信地址:航空航天大学 14 系为民楼 602(100191)

电话:13581810850

E-mail:hloving@163.com

Shrinkage Estimation of Generalized Weibull Parameter in Censored Samples

HONG Dong-pao, ZHAO Yu, MA Xiao-bing

(Department of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The estimation of two parameter generalized Weibull model was studied under type II censored samples. To draw better inferences, the shrinkage estimation was introduced to combine the sample information with the relevant prior information. Then two different shrinkage estimations of the generalized Weibull parameter were proposed in two cases of different prior information. Compared with the maximize likelihood estimation, the relative efficiency of the shrinkage estimations was studied by Monte-Carlo simulation. And the result shows that the shrinkage estimations are better under center conditions, especially when the sample size is small or samples are highly censored. The illustrative example shows that the shrinkage estimations of the generalized Weibull parameter are available for reliability analysis.

Key words: Reliability; Generalized Weibull model; Shrinkage estimation; Prior information; Sample information