

滑翔式远程导弹滑翔段弹道研究

李邦杰^{1,2}, 王明海¹

(1. 陕西西安第二炮兵工程学院 603 室, 西安 710025; 2. 西安航天动力技术研究院, 西安 710025)

摘 要: 滑翔式远程导弹的滑翔弹道选择对其航程影响极为显著。论文主要研究滑翔段轨迹特性及最大滑翔航程弹道的参数近似计算方法。提出了最大升阻比条件下的平衡滑翔弹道是航程较优的弹道的观点,并对这一观点进行了证明;进而给出了最大升阻比平衡滑翔条件下的主要参数间的解析关系式。仿真计算表明给出的滑翔段参数解析关系式精度较高,能用于最大航程弹道的参数近似计算。

关键词: 滑翔弹道; 飞行器设计; 射程优化

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2009)06-2122-05

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.06.012

0 引言

滑翔式远程导弹是近几年美俄研究的一种最新型战略导弹^[1-2]。该类型导弹有三大优点,第一,该类导弹通常在大气层边缘飞行,其飞行高度大大低于中段导弹防御系统的拦截高度,突防能力强;第二,滑翔飞行中可利用气动力不间断机动,更增大了突防能力;第三,长距离滑翔可增大导弹射程。由于这三大优点,使该类导弹成为战略导弹的发展方向。

作为战略武器,导弹最优滑翔弹道要求是在能量一定的情况下,能获得最大的滑翔距离的弹道。这是一个非常复杂的非线性非定常优化问题,而且要求优化结果还应具有可操作性。对于该问题,国内外学者都进行了相关研究,文献[3]研究了近似最优滑翔轨迹,其结论为:导弹在滑翔过程中采用最大升阻比滑翔,基本上可得到最大滑翔距离,与最优解的差不到1%。文献[4]探讨了数值最优化方法,但很难用于弹上控制。文献[5]在文献[3]的基础上探讨几种可能的控制实现方法。文献[6]以美国 Common Aero Vehicle(CAV)的轨迹进行了仿真优化分析,没有对其进行深入理论研究。滑翔导弹如果按最大升阻比滑翔,一般将出现蛙式弹道,从而增大导弹滑翔过程中的横法向过载和热流密度峰值,而平衡滑翔将比蛙式滑翔更有利于滑翔环境的改善。

本文提出了一种最大升阻比条件下的平衡滑翔

轨迹方案,进而给出了平衡滑翔条件下的主要弹道参数的解析解;最后通过仿真对一些重要结论进行了验证。

1 弹道模型

1.1 坐标系定义

对于在大气层内进行无动力飞行的飞行体,为了简化问题,在不考虑地球自转和扁率影响时,其飞行模型可用简化了的平面内二维坐标系来描述。建模平面选取飞行体速度与地心构成的平面。

取飞行体质心为原点,飞行体质心与地心的连线为 OY 轴,指向地心为负向; OX 轴垂直 OY 轴并与飞行体速度同向。 OY 即为径向速度方向, OX 为水平速度方向。

1.2 弹道建立

在上述坐标系下,飞行体质心运动在平面内的运动学和动力模型可表述如下:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{D}{m}(\cos\Theta + \frac{L}{D}\sin\Theta) - \frac{uv_r}{r} \\ \frac{dv_r}{dt} = -g + \frac{L}{m}\cos\Theta - \frac{D}{m}\sin\Theta + \frac{u^2}{r} \\ \frac{dr}{dt} = v_r \\ \frac{dL_R}{dt} = \frac{u}{r}R_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, u 表示速度在水平方向上的分量; v_r 表示速

度在地心矢径方向上的分量; r 表示地心矢径; R_0 表示地球半径; D 表示气动阻力; L 表示气动升力; L_R 表示滑翔航程。

在公式(1)的飞行模型中,等式右边的只有质量 m 是常量。但在其它变量中,部分变量在整个高空滑翔段中值的变化并显著,为了简化滑翔段飞行模型以利于公式推导和方程解算,将这些变化并不显著的变量用其平均值代替。公式(1)变形后可得:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{D}{m}\left(\cos\Theta + \frac{L}{D}\sin\Theta\right) - \frac{uv_r}{r} \\ \frac{dv_r}{dt} = -\bar{g} + \frac{L}{m}\cos\Theta - \frac{D}{m}\sin\Theta + \frac{u^2}{r} \\ \frac{dr}{dt} = v_r \\ \frac{dL_R}{dt} = \frac{u}{r}R_0 \end{cases} \quad (2)$$

上式中, \bar{g} 、 \bar{r} 分别为引力和矢径的平均值; 气动阻力 D 和气动升力 L 可分别表述如下:

$$\begin{cases} D = 0.5C_D\rho(u^2 + v_r^2)S_m \\ L = 0.5C_L\rho(u^2 + v_r^2)S_m \end{cases} \quad (3)$$

其中,大气密度 ρ 是高程的函数;

$$\rho = \rho(r - R_0) \quad (4)$$

2 平衡滑翔弹道的分析与计算

平衡滑翔飞行是指飞行器在大气层内无动力飞行时,任意瞬时飞行器在地心矢径方向上的合力为零,即是(1)式中第二式:

$$\frac{dv_r}{dt} = -\bar{g} + \frac{L}{m}\cos\Theta - \frac{D}{m}\sin\Theta + \frac{u^2}{r} = 0 \quad (5)$$

战略导弹的滑翔距离通常在 6000 km 以上,而滑翔段高程变化一般小于 40 km,平衡条件下地心矢径方向速度大小不变,当地弹道倾角和径向速度都将一直很小。

$$\begin{cases} \frac{uv_r}{r} \approx 0 \\ \Theta \approx 0 \end{cases} \quad (6)$$

则大气层内最大升阻比条件下的平衡滑翔可表述如下:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -aC_D\rho u^2 \\ \frac{dv_r}{dt} = -\bar{g} + aC_L\rho u^2 + \frac{u^2}{r} = 0 \\ \frac{dr}{dt} = v_r \\ \frac{dL}{dt} = \frac{u}{r}R_0 \end{cases} \quad (7)$$

其中 a 为常量:

$$a = \frac{0.5S_m}{m} \quad (8)$$

2.1 最大升阻比条件下的平衡滑翔分析

导弹以最大升阻比滑翔,如果不是平衡滑翔,则势必产生爬升或下滑的非平衡滑翔。最大升阻比非平衡滑翔轨迹一般呈类似正弦振荡曲线,因此以一个振荡周期为单位进行分析。以平衡滑翔为基准,对(7)式中的第一式、第二式的积分式变分可得:

$$\begin{cases} \Delta u = -a\int_{t_0}^{t_1} [\Delta(C_D\rho)\tilde{u}^2 + 2(\tilde{C}_D\tilde{\rho})\tilde{u}\Delta u] dt \\ \Delta v_r = a\int_{t_0}^{t_1} [\Delta(C_L\rho)\tilde{u}^2 + 2(\tilde{C}_L\tilde{\rho})\tilde{u}\Delta u] dt + \frac{1}{\bar{r}}\int_{t_0}^{t_1} 2\tilde{u}\Delta u dt \end{cases} \quad (9)$$

上式中在一个振荡周期区间 $[t_0, t_1]$, 由于 Δu 正负对应,同时 $\tilde{u} < \bar{r}$, 可忽略掉上式水平速度增量项的影响,(9)式简化为:

$$\begin{cases} \Delta u = -a\int_{t_0}^{t_1} [\Delta(C_D\rho)\tilde{u}^2 + 2(\tilde{C}_D\tilde{\rho})\tilde{u}\Delta u] dt \\ \Delta v_r = a\int_{t_0}^{t_1} [\Delta(C_L\rho)\tilde{u}^2 + 2(\tilde{C}_L\tilde{\rho})\tilde{u}\Delta u] dt \end{cases} \quad (10)$$

在 t_1 时刻,导弹回到了原平衡滑翔状态,即是径向速率变回 t_0 时刻的径向速率,因此有 $\Delta v_r = 0$, 令 $C_L\rho = Q$, 则:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} [\Delta(C_L\rho)\tilde{u}^2 + 2(\tilde{C}_L\tilde{\rho})\tilde{u}\Delta u] dt \\ & = a\int_{t_0}^{t_1} (\Delta Q\tilde{u}^2 + 2\tilde{Q}\tilde{u}\Delta u) dt = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

假设升力-阻力系数关系可用下式描述:

$$C_D = f(C_L) \quad (12)$$

(1)式中的第一式则有:

$$\begin{aligned} \Delta u & = -a\int_{t_0}^{t_1} [\Delta(C_D\rho)\tilde{u}^2 + 2(C_D\rho)\tilde{u}\Delta u] dt \\ & = -a\int_{t_0}^{t_1} \Delta\left[\frac{f(C_L)}{C_L}C_L\rho\right]\tilde{u}^2 dt \\ & \quad - 2a\int_{t_0}^{t_1} \frac{f(\tilde{C}_L)\tilde{C}_L\tilde{\rho}}{C_L}\tilde{u}\Delta u dt \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$G = \frac{f(C_L)}{C_L} = 1/K \quad (14)$$

显然 K 为气动力升阻比,则:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -a \int_{t_0}^{t_1} \Delta[GQ] \tilde{u}^2 dt - 2a \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G} \tilde{Q} \tilde{u} \Delta u dt \\ &= -a \int_{t_0}^{t_1} \Delta \tilde{G} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt - a \int_{t_0}^{t_1} \Delta \tilde{Q} \tilde{G} \tilde{u}^2 dt - \\ &\quad 2a \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G} \tilde{Q} \tilde{u} \Delta u dt = -a \int_{t_0}^{t_1} \Delta \tilde{G} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt - \\ &\quad a \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G} (\Delta \tilde{Q} \tilde{u}^2 + 2 \tilde{Q} \tilde{u} \Delta u) dt \end{aligned} \quad (15)$$

在一个振荡周期时间内,由中值定理可得至少存在一个 \tilde{G}_ξ ,使得:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \tilde{G} (\Delta \tilde{Q} \tilde{u}^2 + 2 \tilde{Q} \tilde{u} \Delta u) dt \\ &= \tilde{G}_\xi \int_{t_0}^{t_1} (\Delta \tilde{Q} \tilde{u}^2 + 2 \tilde{Q} \tilde{u} \Delta u) dt \end{aligned}$$

将上式代入(15)式,并由(11)式可得:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -a \int_{t_0}^{t_1} \Delta \tilde{G} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt - a \tilde{G}_\xi \int_{t_0}^{t_1} (\Delta \tilde{Q} \tilde{u}^2 + 2 \tilde{Q} \tilde{u} \Delta u) dt \\ &= -a \left(\int_{t_0}^{t'} \Delta G_{r-} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt + \int_{t'}^{t_1} \Delta G_{r+} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt \right) \end{aligned} \quad (16)$$

下标 $t' -$ 表示,小于时间 t' 的前半个周期,反之则为 $t' +$ 。对于一般导弹,速度越大,最大升阻比越大。当速度的第一个振荡周期的前半个周期内速度增量为负时,由于振荡是收敛的,则负值区间在区间长度上和振动峰值上都大于正值,如图1所示。

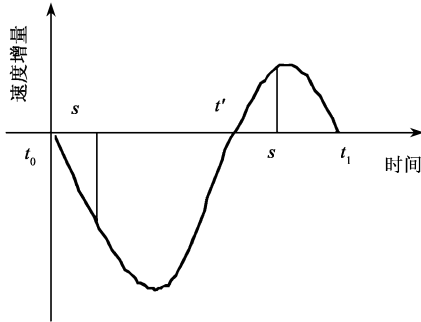


图1 时间速度增量示意图

Fig.1 Diagrammatic sketch of time-velocity increment

因此(16)可变形如下:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -a \left(\int_{t_0}^{t_0+(t_1-t')} \Delta G_{r-} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt + \int_{t'}^{t_1} \Delta G_{r+} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_0+(t_1-t')}^{t'} \Delta G_{r-} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt \right) \end{aligned} \quad (17)$$

在一个周期内,可近似认为升阻比倒数增量与速度增量呈线性关系;同时由平衡滑翔规律可知平

衡滑翔的升力总是单调递减。比较区间 $[t_0, t_0 + t_1 - t']$ 的点 S 和区间 $[t', t_1]$ 的对应点 S' ,显然有 $|\Delta G_{r-}|_S > |\Delta G_{r-}|_{S'}$ 且有 $|\tilde{Q} \tilde{u}^2|_S > |\tilde{Q} \tilde{u}^2|_{S'}$,加之在区间 $[t_0, t']$ 的速度 V_{r-} 小于 $[t', t_1]$ 的速度 V_{r+} ,则有:

$$\begin{aligned} V_{r-} < \bar{V} < V_{r+} \Rightarrow K_{r-} < \bar{K} < K_{r+} \Rightarrow \\ G_{r-} > \bar{G} > G_{r+} \Rightarrow \Delta G_{r-} > 0 > \Delta G_{r+} \end{aligned} \quad (18)$$

则(17)式有:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_0+(t_1-t')} \Delta G_{r-} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt + \int_{t'}^{t_1} \Delta G_{r+} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt + \\ &\int_{t_0+(t_1-t')}^{t'} \Delta G_{r-} \tilde{Q} \tilde{u}^2 dt > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta u < 0 \quad (20)$$

当速度的第一个振荡周期的前半个周期内速度增量为正时,则有:

$$\begin{cases} |\Delta G_{r-}|_S > |\Delta G_{r-}|_{S'} \\ |\tilde{Q} \tilde{u}^2|_S > |\tilde{Q} \tilde{u}^2|_{S'} \\ \Delta G_{r-} < 0 < \Delta G_{r+} \end{cases} \quad (21)$$

与前半个周期内速度增量为负相比,(21)式中的第二项将抑制速度的水平增加,因此,其速度变化将不再显著。

从上式可以得出,当在最大升阻比条件下滑翔时,如果是非平衡滑翔,总滑翔距离将随滑翔初始高程增大而增大,但其增大速率将随高程增大而迅速减小。因此,如果初始高程小于平衡滑翔的初始高程,将不利于滑翔距离的优化;而初始高程大于平衡滑翔的初始高程时,虽然滑翔距离稍有增大,但考虑到平衡滑翔在横法向过载和热流密度峰值方面都有更好的表现,且这时非平衡带来的滑翔距离增大并不显著。因此本文认为最大升阻比条件下的平衡滑翔是一种更优化的滑翔方式。

2.2 最大升阻比平衡滑翔弹道解析解

由(6)式的第二式可得:

$$a C_{Lr} \rho u^2 = \bar{g} - \frac{u^2}{r} \quad (22)$$

大气密度可近似表示如下:

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta H} \quad (23)$$

其中, ρ_0 为一常值。则:

$$a C_{Lr} \rho_0 u^2 e^{-\beta H} = \bar{g} - \frac{u^2}{r} \quad (24)$$

上式对水平速度变量 u 微分并整理后可得:

$$\frac{dH}{du} = \frac{2\bar{g}}{\beta u \left(\bar{g} - \frac{u^2}{r} \right)} \quad (25)$$

又因为:

$$\frac{du}{dt} = \frac{aC_{L\rho_0}u^2}{K_{LD}} = \frac{\bar{g} - \frac{u^2}{r}}{K_{LD}} \quad (26)$$

$$v_r = \frac{dH}{dt} = \frac{dH}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{2\bar{g}}{\beta K_{LD}} \cdot \frac{1}{u} \quad (27)$$

虽然平衡滑翔时要求径向速度不变,但事实上,为了保证在最大升阻比平衡滑翔,其径向速度是有变化的。一般导弹在高超声速飞行时,最大升阻比变化不大,可取其平均值,在此处暂取 2.0,如果水平速度在区间 [3000, 7000] 米/秒内变化时,其径向速度变化范围为 [9.81, 21.9], 对于长达半小时的滑翔飞行,有这样量级的径向速度变化仍可认为是平衡滑翔许。

由(26)式可以积分出水平速度与时间的关系式如下:

$$u = a \left[\frac{2}{e^{\left(\frac{2a}{b}t + 2ac_0\right)} + 1} - 1 \right] \quad (28)$$

其中:

$$\begin{cases} a = \sqrt{gr} \\ b = K_{LD}r \end{cases} \quad (29)$$

$$C_0 = \left(\ln \frac{a + u_0}{a - u_0} \right) / 2a \quad (30)$$

上式 u_0 表示 $t = 0$ 时的水平速度,即是水平初速。显然,对于最大升阻比平衡滑翔,如果确定了滑翔初速 u_0 和末速 u_e , 其滑翔时间可由下式计算得出:

$$T = \frac{b}{2a} \left(\ln \frac{a + u_0}{a - u_0} - \ln \frac{a + u_e}{a - u_e} \right) \quad (31)$$

将(26)式代入(2)式的第四式可得其滑翔航程可表示为:

$$\frac{dL_R}{du} = \frac{R_0 K_{LD}}{2} \cdot \frac{u}{gr - u^2} \quad (32)$$

如果确定了滑翔初速 u_0 和末速 u_e , 积分上式可得对应的滑翔航程:

$$L_R = \frac{R_0 K_{LD}}{2} \ln \frac{gr - u_e^2}{gr - u_0^2} \quad (33)$$

将(26)式代入(25)并令 $\frac{2\bar{g}}{\beta K_{LD}} = E$, 积分可得:

$$H = \frac{Eb}{a^2} \ln(e^{2ac_0 + 2ab^{-1}t} - 1) - \frac{E}{a}t + C_1 \quad (34)$$

其中:

$$C_1 = H_0 - \frac{Eb}{a^2} \ln(e^{2ac_0} - 1) \quad (35)$$

上式 H_0 表示 $t = 0$ 时的导弹高程。

综上所述,最大升阻条件下的平衡滑翔的主要参数近似解析解是可以获得的。

3 最大升阻比平衡滑翔仿真结果

由于在上述公式推导中进行了大量简化,为了验证推导结果的正确性,本文用数字仿真的方法对最大升阻比平衡滑翔进行了研究。

取两枚滑翔导弹以相同的初始总能量和相同的弹道倾角开始滑翔,其中一枚用最大升阻比平衡滑翔,而另一枚用最大升阻比滑翔,其时间-高程关系如图 2;取不同滑翔初始高程采用最大升阻比平衡滑翔下的初始高程变化与径向速度变化如图 3;图 4 是为了验证公式(26)和公式(33)而进行的仿真。

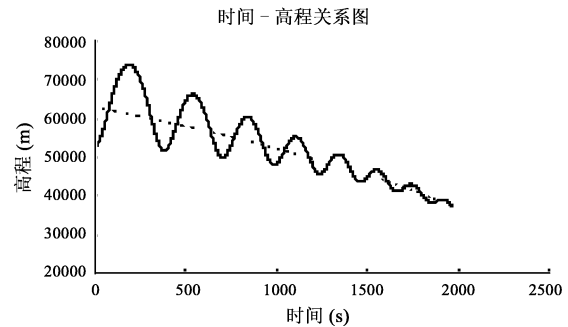


图 2 两种滑翔方式时间-高程关系比较图

Fig. 2 Compare figure of time-height relation by two glide tracks

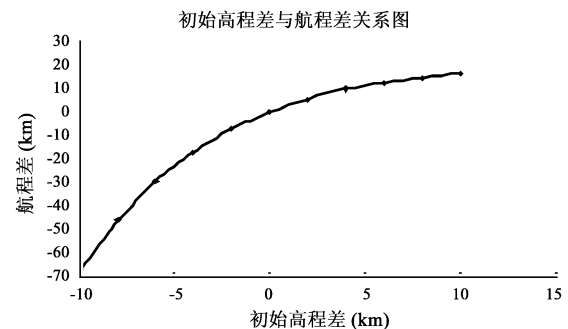


图 3 初始高程差与航程差关系图

Fig. 3 Relation of initial height error and range error

图 2 中,实线表示只初始高程偏离平衡滑翔高程条件下最大升阻比滑翔的高程轨迹,虚线表示最大升阻比平衡滑翔的高程变化轨迹。图 3 绘制了非

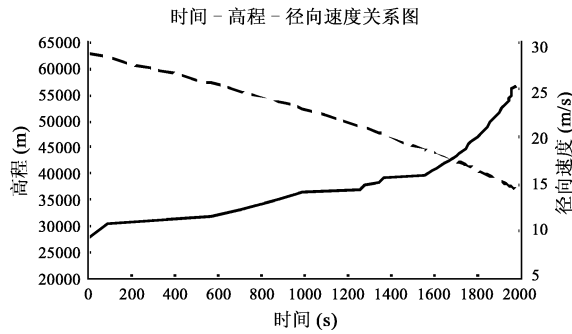


图 4 平衡滑翔时间 - 高程 - 径向速度关系图
Fig.4 Relation of time-height-radial velocity
by equilibrium glide

平衡滑翔初始高程不同时以最大升阻比滑翔,以相同的速度结束滑翔所对应的不同滑翔距离,图中航程最大偏差约为平衡滑翔的 0.64%。图 4 实线表示径向速度变化规律,虚线表示高程变化规律,其结果与公式(27)、(34)基本一致。

4 结论

本文用理论分析的方法探讨了在最大升阻比条件下,相同能量的导弹,不同的滑翔轨迹对滑翔距离的影响,并给出了最大升阻比平衡滑翔条件下主要参数的近似解析解;最后用仿真的方式验证理论分析给出的结果。

本文研究认为在相同能量条件下,初始滑翔高程越高,对应的滑翔航程越大,但其增大速率随初始高程增大而减小,而平衡滑翔的热流密度峰值,最大横法向过载都较非平衡滑翔理想。此外,最大升阻比条件下的平衡滑翔参数变化规律较为简单,容易通过参数的解析解近似计算相关主要参数,也更易

于控制实现这样的滑翔轨迹。论文给出的解析关系式除了能计算最大升阻比平衡滑翔时的相关参数外,也可用于只是最大升阻比飞行时的近似解,因为二者之间的偏差小于 1%,该套方程较为简单,计算量小,易于计算,这对于弹道的初步设计有较大指导性作用。

参考文献:

- [1] 刘晓恩. 美俄新一代战略导弹技术分析[J]. 中国航天, 2005, 5: 36 - 40. [LIU Xiao-en, Analysis on the future strategic missile technology of USA and Russia[J]. Aerospace China, 2005, 5: 36 - 40.]
- [2] 关世义. 基于钱学森弹道的新概念巡航导弹[J]. 飞航导弹, 2003(1): 1 - 4. [GUAN Shi-yi. The new concept cruise missile based Qian Xue-sen trajectory[J]. Cruise Missile, 2003(1): 1 - 4.]
- [3] 阮春荣[美]. 大气中飞行的最优轨迹[M]. 茅振东译. 北京: 宇航出版社, 1978. [RUAN Chun-rong. The Optimal Trajectory of Aircraft Flying in the Air[M]. Beijing: Astronautics Publishing Company, 1978.]
- [4] John T B. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. J of guidance, control and dynamics. 1998, 21(2): 1 - 10.
- [5] 孙明玮, 彭南楠, 杨明. 导弹最优滑翔弹道的设计及存在的问题[J]. 飞行力学, 2006, 24(1): 26 - 29. [SUN Ming-wei, PENG Nan-nan, YANG Ming. Missile's optimal glide trajectory design and its existed problems[J]. Flight Dynamics, 2006, 24(1), 26 - 29.]
- [6] Dr. Hussein Youssef, Dr. Rajiv Chowdhry. Hypersonic Global Reach Trajectory Optimization. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 16 - 19 August 2004, Providence, Rhode Island.

作者简介: 李邦杰(1978 -), 男, 博士/讲师, 主要从事导弹总体设计与精确制导研究。

通信地址: 西安第二炮兵工程学院 603 教研室(710025)

电话: 13572046763

E-mail: ro_soldier@sina.com

Research on Glide Trajectory of Long Range Glide Missile

LI Bang-jie^{1,2}, WANG Ming-hai¹

(1. Faculty 603, the Second Artillery Engineering Institute, Xi'an 710025, China;

2. Xi'an Space Impetus Technology Academy, Xi'an 710025, China)

Abstract: The glide trajectory is very important to flying range of long range glide missile. This study analyzes the character of glide trajectory and deduces the approximate parameter formulæ of maximum glide range trajectory. A viewpoint that the maximal lift-drag ratio equilibrium glides are the optimum trajectory to maximum glide range was given. The viewpoint was proved by mathematic method. The formulæ for important parameters of maximal lift-drag ratio equilibrium glide were deduced. The simulation results show the calculation precise of these formulæ is high. The parameters of the most range trajectory can be calculated by these formulæ in the glide aircraft concept design.

Key words: Glide missile; Aircraft design; Range optimum