文章编号: 1001-4322(2009)12-1803-07

部分相干部分偏振矢量双曲余弦-高斯光束 通过双焦透镜的传输特性^{*}

邢 燕, 刘海岗, 吕百达

(四川大学 激光物理与化学研究所,成都 610064)

摘 要: 基于电磁束相干和偏振性的统一理论,推导出部分相干部分偏振矢量双曲余弦-高斯光束通过 双焦透镜后交叉谱密度的解析式。部分相干部分偏振矢量高斯谢尔模型光束通过双焦透镜的传输和部分相干 部分偏振矢量双曲余弦-高斯光束通过常规透镜的传输是2个特例。研究表明:聚焦矢量双曲余弦-高斯光束 的光强、偏振度、光谱相干度和焦移与离心参数、相关长度、束腰宽度和透镜焦距等参数有关。

关键词: 部分相干部分偏振; 双曲余弦-高斯光束; 双焦透镜; 偏振度; 光谱相干度 中图分类号: O435 **文献标志码:** A

近年来,从 Wolf 提出的随机电磁束相干和偏振性的统一理论出发^[1],国内外对部分相干部分偏振矢量高 斯谢尔模型(GSM)光束的传输特性已进行了广泛研究^[2-6],但对更为一般的随机电磁束特性研究还不多。本 文对一类有代表意义的部分相干部分偏振矢量双曲余弦-高斯(ChG)光束通过双焦透镜的传输特性做了研究, 推导出交叉谱密度的解析公式,由此可得出光强、偏振度和光谱相干度的解析式。详细分析了离心参数(g)、 相关长度(δ_{qq})、束腰宽度(σ)和透镜焦距(f_x, f_y)等参数对光强、偏振度、光谱相干度和焦移的影响。部分相干 部分偏振矢量 GSM 光束可作为离心参数 g=0 的特例,而部分相干部分偏振矢量 ChG 光束通过常规透镜的 传输可作为 $f_x = f_y$ 的特例得出。所得结果深化了对部分相干部分偏振矢量光束特性的认识。

1 基本理论

设 z=0 平面处部分相干矢量 ChG 光束的交叉谱密度矩阵为^[7-8]

$$W(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{wy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \\ W_{yx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{yy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \end{bmatrix}$$
(1)

部分相干部分偏振矢量 ChG 光束在 z=0 面上的交叉谱密度矩阵元具有如下形式

 $W_{a\beta}(\boldsymbol{\rho}_{10},\boldsymbol{\rho}_{20},0) = B_{a\beta} \cosh(\boldsymbol{\Omega}_{0} x_{10}) \cosh(\boldsymbol{\Omega}_{0}, y_{10}) \cosh(\boldsymbol{\Omega}_{0} x_{20}) \cosh(\boldsymbol{\Omega}_{0} y_{20}) \times$

$$\exp\left[-\frac{\boldsymbol{\rho}_{10}^{2}+\boldsymbol{\rho}_{20}^{2}}{(2\sigma)^{2}}\right]\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}_{10}-\boldsymbol{\rho}_{20}|^{2}}{2\delta_{qg}^{2}}\right)$$
(2)

式中: Ω_0 是与双曲余弦部分相关的参数; $B_{\alpha\beta}$ 为常数; 2σ 为高斯部分的束腰宽度; $\delta_{\alpha\beta}$ 为相关长度, $\rho_{10} = (x_{10}, y_{10}), \rho_{20} = (x_{20}, y_{20})$ 是 z=0 面上的 2 维位置矢量。

交叉谱密度矩阵元通过傍轴 ABCD 光学系统的传输公式为^[3,9]

$$W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_{1},\boldsymbol{\rho}_{2},z) = \left(\frac{k}{2\pi B}\right)^{2} \iiint_{(z=0)} W_{\alpha\beta}^{(0)}(x_{10},y_{10},x_{20},y_{20},0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2B} \left[A_{x}x_{10}^{2} + A_{y}y_{10}^{2} - 2(x_{1}x_{10} + y_{1}y_{10}) + D(x_{1}^{2} + y_{1}^{2}) - \left[A_{x}x_{20}^{2} + A_{y}y_{20}^{2} - 2(x_{2}x_{20} + y_{2}y_{20}) + D(x_{2}^{2} + y_{2}^{2})\right]\right\} dx_{10} dx_{20} dy_{10} dy_{20}$$
(3)

式中: $\rho_1 = (x_1, y_1), \rho_2 = (x_2, y_2)$ 为 z 面上的位置矢量;k 是波数; $\alpha = x, y; \beta = x, y$ 。在 z=0 面上置一双焦透镜,则有

基金项目:国家自然科学基金项目(10574097,10874125)

作者简介:邢 燕(1985-),女,硕士研究生,主要从事激光光束传输与变换研究;soyoula1985@163.com。 通信作者:吕百达(1943-),男,教授;baidalu0@tom.com。

^{*} 收稿日期:2008-11-11; 修订日期:2009-05-14

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha} & B_{\alpha} \\ C_{\alpha} & D_{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{f_{\alpha}} & z \\ -\frac{1}{f_{\alpha}} & 1 \end{bmatrix}$$
(4)

式中: f_x , f_y 分别为透镜 x, y 方向上的焦距。

将式(2)、式(4)代入式(3),并用积分公式[10]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-p^2 x^2 \pm qx) \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right) \tag{5}$$

经过繁琐的积分运算得

$$W_{a\beta}(x_{1}, x_{2}, y_{1}, y_{2}, z) = \frac{M}{16} \left(\frac{\pi^{4}}{E_{1}F_{1}G_{x}G_{y}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \exp\left[\frac{\left(\frac{ikx_{1}}{z} + (-1)^{m} \frac{g}{2\sigma} \right)^{2}}{4E_{1}} \right] \times \exp\left(\frac{H_{x}^{2}}{4G_{x}} \right] \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \exp\left[\frac{\left(\frac{iky_{1}}{z} + (-1)^{m} \frac{g}{2\sigma} \right)^{2}}{4F_{1}} + \frac{H_{y}^{2}}{4G_{y}} \right]$$
(6)

式中

$$g = 2\sigma \Omega_0^{[11]}; \quad M = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 B_{qq} \left[-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)\right]; \\ H_x = \frac{\frac{ikx_1}{2} + (-1)^m \frac{g}{2\sigma}}{2E_1\delta_{qq}^2} + (-1)^m \frac{g}{2\sigma} - \frac{ikx_2}{z};$$

$$H_{y} = \frac{\frac{1}{2} + (-1)^{m} \frac{s}{2\sigma}}{2F_{1}\delta_{q\beta}^{2}} + (-1)^{n} \frac{g}{2\sigma} - \frac{iky_{2}}{z}; \quad G_{x} = E_{2} - \frac{1}{4E_{1}\delta_{q\beta}^{4}}; \quad G_{y} = F_{2} - \frac{1}{4F_{1}\delta_{q\beta}^{4}};$$

$$E_{1} = \frac{1}{4\sigma^{2}} + \frac{1}{2\delta_{q\beta}^{2}} + \frac{ik(f_{x} - z)}{2zf_{x}}; \quad E_{2} = \frac{1}{4\sigma^{2}} + \frac{1}{2\delta_{q\beta}^{2}} - \frac{ik(f_{x} - z)}{2zf_{x}};$$

$$F_{1} = \frac{1}{4\sigma^{2}} + \frac{1}{2\delta_{q\beta}^{2}} + \frac{ik(f_{y} - z)}{2zf_{y}}; \quad F_{2} = \frac{1}{4\sigma^{2}} + \frac{1}{2\delta_{q\beta}^{2}} - \frac{ik(f_{y} - z)}{2zf_{y}};$$

部分相干部分偏振矢量 ChG 光束通过常规透镜的传输可以看作上述结果的特殊情况,令 $f_x = f_y = f$ 时, 由式(6)和式(7)得

$$W_{q\beta}(x_{1}, x_{2}, y_{1}, y_{2}, z) = \frac{M}{16} \left(\frac{\pi^{2}}{E_{1}G_{x}}\right) \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \exp\left[\frac{\left(\frac{ikx_{1}}{z} + (-1)^{m} \frac{g}{2\sigma}\right)^{2}}{4E_{1}}\right] \times \exp\left(\frac{H_{x}^{2}}{4G_{2}}\right) \times \sum_{n=1}^{2} \exp\left[\frac{\left(\frac{iky_{1}}{z} + (-1)^{m} \frac{g}{2\sigma}\right)^{2}}{4E_{1}}\right] \times \exp\left(\frac{H_{y}^{2}}{4G_{x}}\right)$$
(7)

式中: $E_1 = F_1 = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{1}{2\delta_{qg}^2} + \frac{ik(f-z)}{2zf}; E_2 = F_2 = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{1}{2\delta_{qg}^2} - \frac{ik(f-z)}{2zf}$

当 g=0 时,由式(6)和(7)可得部分相干部分偏振 GSM 光束通过双焦透镜的传输结果,此结果与文献[3] 一致。将式(6)和式(7)代入

$$I(x_1, y_1, x_2, y_2, z) = W_{xx}(x_1, y_1, x_2, y_2, z) + W_{yy}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)$$
(8)

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \operatorname{Det}[\mathbf{W}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)]}{\operatorname{Tr}^2[\mathbf{W}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)]}}$$
(9)

$$\mu = \frac{\mathrm{Tr}[\mathbf{W}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)]}{\sqrt{\mathrm{Tr}[\mathbf{W}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)]\mathrm{Tr}[\mathbf{W}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)]}}$$
(10)

可得到 z 面上的光强 I、偏振度 P 和光谱相干度 μ 的解析公式式中 Tr 为矩阵的迹, Det 为行列式值。

2 数值计算和分析

2.1 光 强

数值计算中取 $B_{xx} = 1, B_{yy} = 1/3, B_{xy} = B_{yx} = 0, k = 1 \times 10^4 \text{ mm}^{-1}$ 。 x, y 方向上焦距不等 $(f_x \neq f_y)$ 会引起 对应面上光强椭圆分布长短轴位置的不同,这与文献[3]的结果一致。图 1(a), (b) 为 z = 100 mm 和图(c), (d)为 z=300 mm 面上 x,y方向上光强随离心参数 g 的变化。计算参数为 $f_x = 100 \text{ mm}, f_y = 300 \text{ mm}, \delta_{xx} = 0.1 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.05 \text{ mm}, \text{由图 1(a)}, (b)知,当 g=0 时,即矢量 ChG 光束变成矢量 GSM 光束,x 方向上光强 为高斯分布,当 g 逐渐增大,中心光强也逐渐变大,光强仍为近似高斯分布,但当 g 较大如 g=2 时,在 y 方向 上光强分布由单峰变为双峰。在 z=300 mm 面上,g 对 x,y 方向上光强分布的影响与图 1(a), (b)中 g 对 y, x 方向的规律相同,这是由于双焦透镜在 x,y 方向的聚焦程度不同引起的。$



Fig. 1 Intensity distributions in the *x* and *y* directions for different values of the decentered parameter 图 1 光强在 *x*,*y*方向上随离心参数 g 的变化

图 2 为焦距 f_x 对轴上光强分布的影响,计算参数为 f_y =300 mm,g=1, δ_{xx} =0.1 mm, δ_{yy} =0.05 mm。由图可知,在 y 方向焦距为定值时(f_y =300 mm),x 方向焦距 f_x 的减小会引起轴上实际焦点向靠近透镜的方向移动,这即焦移^[12],且光强最大值增加。

图 3 为参数 g, δ_{qq} 对实际焦点位置 z_{max} 的影响。图 3(a),(b) 和图 3(c),(d)分别对应 f = 100 mm 的常规透镜和 $f_x = 100$ mm, $f_y = 300$ mm 的双焦透镜的情况。由图可知,无论为常规或 者双焦透镜,当离心参数 g 及相关长度为定值时,束腰 σ 的增大 均引起轴上最大光强值位置向远离透镜方向移动,但是束腰 σ 达 到一定值后(如 $\sigma > 0.8$) z_{max} 趋于定值,当束腰 σ 较小时(如 $\sigma < 0.$ 8),比较可知,当 δ_{xx} 为定值或 δ_{yy} 为定值相关长度 δ_{yy} 或 δ_{xx} 的增

大,及离心参数 g 的增大都会引起轴上最大光强值位置向远离透镜方向移动。



2.2 偏振度

当 $f_x = 100 \text{ mm}, f_y = 300 \text{ mm}, \delta_{xx} = 0.1 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.05 \text{ mm}$ 时,图 4(a),(b)为 z = 100 mm 和图 4(c), (d)为 z = 300 mm 面上 x, y 方向上偏振度随离心参数 g 的变化图。由图图 4(a),(b)可知, g 增大引起 x 方向 上中心(x=0)偏振度减小,但偏振度分布形状不变,对比图 2(a)g 增大却引起 x 方向上中心光强值变大。当 g较大如 g=2 时, g 增大还引起 y 方向上偏振度分布形状的变化,中心(y=0)偏振度分布出现凹陷。图 4(c), (d)说明, g 对 x, y 方向上偏振度分布的影响与图 4(a),(b)中 g 对 y, x 方向的规律相同,这也是由于双焦透 镜在 x, y 方向的聚焦程度不同引起的。

图 5 为 f_x , g 和 δ_{a} 对轴上偏振度分布的影响。由图 5(a)可知,偏振度最大值的位置随 f_x 的增大向远离



Fig. 4 Degree of polarization distributions in the *x* and *y* directions for different values of the decentered parameter 图 4 *x*, *y*方向上偏振度随离心参数 *g* 的变化

透镜方向移动。由图 5(b)可知,离心参数 g 增大会引起轴上偏振度出现 2 个极大值和一个极小值,且极值逐 渐减小。当两方向上相关长度 $\delta_{xx} = \delta_{yy}$ 时,由式(6),(7)和(13)得偏振度为 $P = |(B_{xx} - B_{yy})/(B_{xx} + B_{yy})|$,因 数值计算 $B_{xx} = 1, B_{yy} = 1/3, \mu$ P=0.5,此结果也可由图 5(c)得到。比较线 $\delta_{xx} = 0.1 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.2 \text{ mm}$ 和 $\delta_{xx} = 0.05 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.1 \text{ mm}$ 与线 $\delta_{xx} = 0.1 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.05 \text{ mm}$ 和 $\delta_{xx} = 0.2 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.1 \text{ mm}$ 可知当 $\delta_{xx} < \delta_{yy}$ 时



图 5 f_x , g 和 $\delta_{\alpha\beta}$ 对轴上偏振度分布的影响

图 6 为 g, δ_{ag} 对实际焦点处偏振度的影响。图 6(a), (b)和 (c), (d)分别对应常规透镜和双焦透镜的情况。由图 6(a)可知,当 $\sigma < 0.8 \text{ mm}$ 时,离心参数 g 较小时(如 g ≤ 1),实际焦点处偏振度随 σ 的增大而变大,离心参数 g 较大时(如 g = 5),偏振度随 σ 的增大却先增大后减小。但当束腰 $\sigma > 0.8 \text{ mm}$ 时,偏振度为一定值。 由图 6(c)可知,无论离心参数 g 取何值,实际焦点处偏振度随束腰的增大均先增大后变小,最后趋于同一定 值。由图 6(b), (d)线 $\delta_{xx} = 0.1 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.2 \text{ mm}$ 和 $\delta_{xx} = 0.05 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.1 \text{ mm}$ 可知,无论常规透镜还是双 焦透镜,当 $\delta_{xx} < \delta_{yy}$ 时,实际焦点处偏振度随 σ 的增大先减小后增大,且最后趋于定值,但相关长度的改变会引 起出现最小偏振度值位置的变化。由线 $\delta_{xx} = 0.1 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.05 \text{ mm}$ 和 $\delta_{xx} = 0.2 \text{ mm}, \delta_{yy} = 0.1 \text{ mm}$ 知,当 $\delta_{xx} > \delta_{yy}$ 时,对常规透镜偏振度随 σ 的增大而增大,对双焦透镜偏振度随 σ 的增大先增大后减小,两种情况最后均 趋于定值。当 x, y方向相关长度相同时,偏振度恒为定值 0.5。





2.3 光谱相干度

图 7 为(a), (b)为 z=100 mm 和图 7(c), (d)为 z=300 mm 面上 x, y 方向上光谱相干度随相关长度的变化。参数取值为 g=1, σ =0.3 mm, f_x =100 mm, f_y =300 mm, 由图 7(a), (d)可知, 在 z=100 mm 面 x 方向 及 z=300 mm 面 y 方向光谱相干度不受相关长度影响。由图 7(b), (c)可知, 在 z=100 mm 面 y 方向及 z=

300 mm 面 x 方向光谱相干度分布与相关长度有关,此时同一点处光谱相干度随相关长度的增大而变大。

图 8 为(a), (b)为 z=100 mm 和图 8(c), (d)为 z=300 mm 面上 x, y 方向上光谱相干度随离心参数 g 的 变化。









参数取为 σ =0.3 mm, δ_{xx} =0.1 mm, δ_{yy} =0.05 mm, f_x =100 mm, f_y =300 mm,由图可知,离心参数 g 增大引 起光谱相干度出现震荡,且离心参数 g 越大震荡越剧烈。比较图 8(a),(b)在 z=100 mm 面上 g 对 x 方向光 谱相干度的影响比在 y 方向更大,而在 z=300 mm 面上则相反。

3 结 论

本文对部分相干部分偏振矢量 ChG 光束通过双焦透镜的传输特性做了详细研究,推导出通过双焦透镜后 交叉谱密度的解析公式,由此可得出光强、偏振度和光谱相干度的解析式。部分相干部分偏振矢量 ChG 光束 通过常规透镜和部分相干部分偏振矢量 GSM 光束通过双焦透镜的传输可作为本文结果的 2 个特例处理。研 究结果表明,*x*,*y*方向上焦距不等($f_x \neq f_y$)会引起对应面上光强、偏振度和光谱相干度椭圆分布长短轴位置不 同,这与文献[3]结果相同。但不同的是离心参数 *g* 会影响矢量 ChG 光束的传输和聚焦特性,离心参数 *g* 增大 引起传输面上中心区域光强变大,偏振度减小,光谱相干度震荡加剧。*g* 较大(*g*=2)引起非聚焦方向上中心区 域光强和偏振度分布出现凹陷,光谱相干度比在聚焦方向震荡减弱。无论常规还是双焦透镜,当矢量 ChG 光 束束腰 σ 小于某一值时($\sigma < 0.8$),离心参数 *g* 和相关长度 δ_{xx} , δ_{yy} 的增大引起实际焦点位置向远离透镜的方向 移动,此时参数 *g* 和 δ_{xx} , δ_{yy} 也对实际焦点处偏振度和光谱相干度有影响。

参考文献:

- [1] Wolf E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. Phys Lett A, 2003.312:263-267.
- [2] Goril F, Santarsiero M, Piquero G, et al. Partially polarized Gaussian Schell-model beams[J]. J Opt A, 2001, 3:1-9.
- [3] Zhang Guowen, Pu Jixiong. Stochastic electromagnetic beams focused by a bifocal lens[J]. J Opt Soc Am A ,2008, 25:1710-1715.
- [4] Qiu Yunli, Xu Aijun, Liu Jinglin, et al. Propagation of partially polarized, partially coherent beams[J]. J Opt A , 2008, 10:075004 (1-7pp).
- [5] 丁超亮, 吕百达. 部分空间和部分光谱相干高斯-谢尔模型脉冲光束在自由空间中的光谱和时间特性[J]. 强激光与粒子束, 2008,20(11): 1821-1826. (Ding Chaoliang, Lü Baida. Spectral and temporal properties of spatially and spectrally partially coherent Gaussian Schell2model pulsed beams in free space. *High Power Laser and Particle Beams*, 2008, 20(11):1821-1826)
- [6] 石丽芬, 蒲继雄, 陈子阳. 部分相干电磁光束在湍流介质中传输的偏振变化[J]. 强激光与粒子束, 2006, 18(8):1271-1276. (Shi Lifen, Pu Jixiong, Chen Ziyang. Changes of polarization of partially coherent electromagnetic beams propagating throug turbulent atmosphere. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, 18(8):1271-1276)
- [7] Tovar A, Casperson L W. Production and propagation of Hermite-sinusoidal -Gaussian laser beams[J]. J Opt Soc Am, 1998.15:2425-2432.
- [8] Zhao Zhiguo, Lü Baida. Partially coherent vectorial cosh-Gaussian beams beyond the paraxial approximation[J]. Opt Commun, 2007, 270:8-15.
- [9] Friberg A T, Turunen J. Imaging of Gaussian Schellmodel sources[J]. J Opt Soc Am, 1988, 5:713-720.
- [10] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals Series and Products[M]. 4th ed. New York: Academic Press, 1980, 338.
- [11] Lü Baida, Ma Hong, Zhang Bin. Propagation properties of cosh-Gaussian beams[J]. Opt Commun, 1999, 164:165-170.
- [12] Li Yajun, Wolf E. Focal shifts in diffracted converging spherical waves[J]. Opt Commun, 1981, 39, 211-215.

Propagation properties of partially polarized, partially coherent vectorial cosh-Gaussian beams through bifocal lens

Xing Yan, Liu Haigang, Lü Baida

(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Based on the unified theory of coherence and polarization of electromagnetic beams, the expression for the cross-spectral density of partially polarized, partially coherent vectorial cosh-Gaussian(ChG) beams propagating through a bifocal lens is derived. The propagation of partially polarized, partially coherent vectorial Gaussian Schell-model(GSM) beams propagating through a bifocal lens and the propagation of partially polarized, partially coherent vectorial ChG beams propagating through a conventional lens can be treated as two special cases of our results. It is shown that the intensity, degree of polarization, spectral degree of coherence and focal shifts of focused vectrial ChG beams depend on the decentered parameter, correlation length, waist width and focal length.

Key words: partially polarized; partially coherent; cosh-Gaussian(ChG) beam; bifocal lens; degree of polarization; spectral degree of coherence