

Bayes 修正幂验前方法在制导精度评定中的应用

杨华波, 夏青, 张士峰, 蔡洪

(国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073)

摘 要: 如何合理有效的利用验前信息,是小子样评定中的关键问题。针对导弹制导精度评定,引入修正幂验前分布控制验前信息对验后估计的影响,详细推导了 Bayes 修正幂验前下的制导精度评定中兴趣参数的验后密度函数。通过对参数验后估计的分析,该方法能够有效避免验前信息“淹没”现场信息的情况,而幂参数通过验后边缘分布得到。通过对验后估计平均平方误差(MSE)的分析,给出了验前信息利用的一些基本原则,为工程应用提供了指导。

关键词: Bayes 方法; 小子样; 幂验前分布; 精度评定; 边缘部分

中图分类号: V8 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2009)06-2237-06

DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2009.06.031

0 引言

在工程实际中,小子样问题是普遍存在的。如远程导弹的实弹射击飞行试验、飞机与战术导弹的飞行可靠性试验等,通常都是只有少量的现场样本数据,在这种情况下,经典的统计方法受到了严重的挑战。Bayes 方法作为研究小子样问题的一种有效途径,多年来一直受到人们的重视^[1-2],并且在许多领域都得到了很好的应用。Bayes 方法综合利用验前信息实现参数的验后统计推断。工程中,各类验前信息通常是大量存在的,如各种地面测试试验信息、模拟打靶试验以及相似产品的试验信息等,如何充分合理的利用验前信息是 Bayes 统计推断中的一个关键问题,也是工业部门非常关注的问题。一般情况下,验前信息和现场试验信息具有较强的相关性,但它们往往并非服从同一总体,因此那种直接将验前信息和现场信息进行融合的方法是值得商榷的。近年来,验前信息的合理运用问题受到了重视。文献[3]讨论了幂验前分布的一些优良的性质,如能够有效避免验前信息“淹没”现场信息的情况,文献[4]将幂验前方法应用于回归估计中,文献[5]则将修正幂验前方法应用于水质量评价中,取得了良好的效果。在国内,文献[6]通过引入验前信息可信度的方法控制验前信息对验后统计推断的影响,并将其应用于导弹制导精度评定中,对于幂验前方法的讨论国内还没有看到公开文献。本文以导弹制导精

度评定为例,通过引入幂验前分布,讨论验前信息的合理运用问题,给出了验前信息利用的基本原则。

1 幂验前分布构造

假设 θ 为兴趣参数,存在验前信息 D_0 以及现场定型试验信息 D , 假定 D 和 D_0 为独立随机样本。 $L(\theta | D_0)$ 为基于验前信息的似然函数,传统的基于似然函数的验前分布构造方法为

$$\pi(\theta | D_0) \propto L(\theta | D_0)\pi(\theta) \quad (1)$$

其中 $\pi(\theta)$ 为初始验前,通常取无信息验前分布。则参数 θ 的验后密度函数为

$$\pi(\theta | D_0, D) \propto L(\theta | D)L(\theta | D_0)\pi(\theta) \quad (2)$$

上述方法实际上将验前信息与现场信息无差别的对待,当验前信息与现场信息不一致或部分一致时,上述经典 Bayes 方法值得怀疑。由此人们引入了各种基于折合因子概念的验前信息转换方法^[4-6],将验前信息折合到与现场信息同一分布。幂验前分布的基本思想是利用幂参数 $\delta(0 \leq \delta \leq 1)$ 来控制验前信息对验后统计推断的影响程度,假定 D 和 D_0 为独立随机样本, θ 的幂验前密度为^[1-2]

$$\pi(\theta | D_0, \delta) \propto (L(\theta | D_0))^\delta \pi(\theta) \quad (3)$$

其中 $\pi(\theta)$ 为初始验前,通常取无信息验前分布, $L(\theta | D_0)$ 为基于验前信息的似然函数。如果 $\delta = 0$,表明对 θ 的统计推断不利用任何验前信息,如果 $\delta = 1$,表明将验前信息 D_0 和现场试验信息 D 不加

区别的直接融合。

实际上, δ 的确定是非常困难的。为了增加处理问题的灵活性, 将 δ 视为随机变量, 则 (θ, δ) 的联合验前为

$$\pi(\theta, \delta | D_0) \propto (L(\theta | D_0))^\delta \pi(\theta) \pi(\delta) \quad (4)$$

由于 $\delta \in [0, 1]$, 所以 $\pi(\delta)$ 一般可取为 $Beta(\alpha_\delta, \beta_\delta)$ 分布, 通过改变超参数可以调整 δ 的验前分布特性, 当 $\alpha_\delta = \beta_\delta = 1$ 时, $\pi(\delta)$ 变为 0 到 1 之间的均匀分布。

在获得现场试验信息后, (θ, δ) 的联合验后密度函数为

$$\pi(\theta, \delta | D_0, D) \propto (L(\theta | D_0))^\delta \pi(\theta) \pi(\delta) L(\theta | D) \quad (5)$$

其中 $L(\theta | D)$ 为现场信息的似然函数。

$$\pi(\delta | D_0, D) \propto \frac{(2\pi)^{-\frac{\delta n_0}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta n_0 + n + 2a - 3}{2}\right) \delta^{\alpha_\delta - 1} (1 - \delta)^{\beta_\delta - 1}}{(\delta n_0 + n)^{0.5} (d_1)^{\frac{\delta n_0 + n + 2a - 3}{2}}} \quad (6)$$

其中

$$d_1 = \frac{1}{2} (\delta n_0 \hat{\sigma}_0^2 + n \hat{\sigma}^2 + \delta n_0 n (\bar{x}_0 - \bar{x})^2 / (\delta n_0 + n))$$

根据上式可得到 δ 的验后估计。

δ 的验后估值可由下式得到

$$\hat{\delta} = \int_0^1 \delta \pi(\delta | D_0, D) d\delta / \int_0^1 \pi(\delta | D_0, D) d\delta \quad (7)$$

给定 $\delta, (D_0, D), \mu$ 的边缘验后分布为学生氏 t 分布^[1], 自由度为 $t_n = \delta n_0 + n + 2a - 3$, 其位置参数和尺度参数分别为

$$\left(\frac{\delta n_0 \bar{x}_0 + n \bar{x}}{\delta n_0 + n}, \sqrt{\frac{2d_1}{(\delta n_0 + n + 2a - 3)(\delta n_0 + n)}} \right) \quad (8)$$

而 σ^2 的边缘验后分布为逆 Gamma 分布, 分布参数分别为

$$((\delta n_0 + n + 2a - 3)/2, d_1) \quad (9)$$

这样, 获得了参数 δ 以及 θ 的验后边缘分布, 可进一步对其进行统计推断。

2 修正幂验前分布

计算中发现, 无论验前信息和现场试验信息吻合程度如何, 式(7)所表述的 δ 总是趋近零, 即根据上述的幂验前分布, 验前信息在统计推断中发挥的

对于导弹制导精度评定而言, 兴趣参数 θ 为导弹落点的均值 μ 与方差 σ^2 。假定验前数据为 $D_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n_0})$, 现场飞行试验数据 $D = (x_1, \dots, x_n)$, 记

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} x_{0i}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j,$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} (x_{0i} - \bar{x}_0)^2, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

假定 $\pi(\theta)$ 的无信息验前分布为 $\pi(\mu, \sigma^2) \propto (1/\sigma^2)^a, a > 0$, 当 $a = 1$ 时, 对应的验前为参考验前; 当 $a = 3/2$ 时, 对应的验前为 Jeffreys 验前^[1]。则参数 (θ, δ) 的验后估计可由其验后边缘分布得到。经过进一步的推导, δ 的验后边缘分布为

作用非常弱。为了克服这一不足, 下面引入修正幂验前分布,

$$\pi(\theta, \delta | D_0) \propto L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) \pi(\delta) / \int_{\Theta} L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) d\theta \quad (10)$$

定义 $A = \{\delta: 0 < \int_{\Theta} L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) d\theta < \infty\}$,

记 $\pi(\delta | D_0) \propto \pi(\delta) I_A(\delta)$, 其中 $\pi(\delta)$ 为 Beta 分布, $I_A(\delta)$ 为示性函数。则式(4)写为

$$\pi(\theta, \delta | D_0) \propto L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) \pi(\delta) I_A(\delta) / \int_{\Theta} L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) d\theta \quad (11)$$

根据 Bayes 公式有 (θ, δ) 的联合验后密度为

$$\pi(\theta, \delta | D_0, D) \propto \frac{L(\theta | D) L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) \pi(\delta) I_A(\delta)}{\int_{\Theta} L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) d\theta} \quad (12)$$

参数 (θ, δ) 的验后估计可由其验后边缘分布得到。 δ 的边缘验后密度函数为

$$\pi(\delta | D_0, D) \propto \pi(\delta) \cdot \frac{\int_{\Theta} L(\theta | D) L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} L(\theta | D_0)^\delta \pi(\theta) d\theta} I_A(\delta) \quad (13)$$

对于制导精度评定问题,进一步的推导可以得到 δ 的边缘验后密度函数为

$$\pi(\delta | D_0, D) \propto \frac{\delta^{\frac{\delta n_0}{2} + a + \alpha_\delta - 2} (1 - \delta)^{\beta_\delta - 1} \Gamma\left(\frac{\delta n_0 + n - 3}{2} + a\right)}{\left[\frac{\delta n}{\delta n_0 + n} \frac{(\bar{x}_0 - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}_0^2} + \delta + \frac{n}{n_0} \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right]^{\frac{\delta n_0 + n - 3}{2} + a} \Gamma\left(\frac{\delta n_0 - 3}{2} + a\right)} \tag{14}$$

其中 $b = (3 - 2a)/n_0$,

$$\delta \in \begin{cases} (b, 1], & b \geq 0 \\ [0, 1], & b < 0 \end{cases}$$

δ 的验后估计可由(7)式得到。给定 $\delta, (D_0, D)$ 后, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 的边缘验后密度函数由(8)式、(9)式确定,具体推导过程省略。

上面论述的是只有一组验前数据,如果实际中存在多组不同的验前数据,则可按照类似的方法将其引入到统计推断中。记 D_{0j} 表示第 j 组验前数据, $j = 1, \dots, m$, 且 $D_0 = (D_{01}, \dots, D_{0m})$, 由于不同组验前数据一般不属于同一分布,所以对于每组数据采用不同的幂参数 δ_j , 进一步假定 δ_j 独立服从 Beta 分布,记 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$, 修正幂验前为

$$\pi(\theta, \delta) \propto \frac{\left(\prod_{j=1}^m L(\theta | D_{0j})^{\delta_j} \pi(\delta_j | \alpha, \beta)\right) \pi(\theta)}{\int \left(\prod_{j=1}^m L(\theta | D_{0j})^{\delta_j}\right) \pi(\theta) d\theta} I_B(\delta) \tag{15}$$

式中 $B = \{\delta_1, \dots, \delta_m : 0 < \int \left(\prod_{j=1}^m L(\theta | D_{0j})^{\delta_j}\right) \pi(\theta) d\theta < \infty\}$ 。

(6)式与(14)式存在一定的区别,为方便比较,称第 1 小节中的方法为原始方法,第 2 小节中的方法为修正方法。

3 仿真分析

由(6)式与(14)式以及(8)式、(9)式可以发现,参数 δ 与 μ, σ^2 的验后统计特性与 $n_0, n, \mu_0, \mu, \sigma_0, \sigma$ 都有关系,事实上,验前信息与验后估计的差异主要表现在样本数目、均值以及方差的差异。下面分三种情况:样本容量的差异、均值差异、方差差异讨论验前信息对验后估计的影响。

第一种情况:样本容量差异对验后估计的影响。假设 $\mu_0 = 0.4, \sigma_0^2 = 1, \mu = 0.8, \sigma^2 = 1.5$, 令 $n = 10$, 而 n_0 变化。 n_0 变化时,两种验前分布下 δ 以及验后均值、方差的点估计变化曲线。

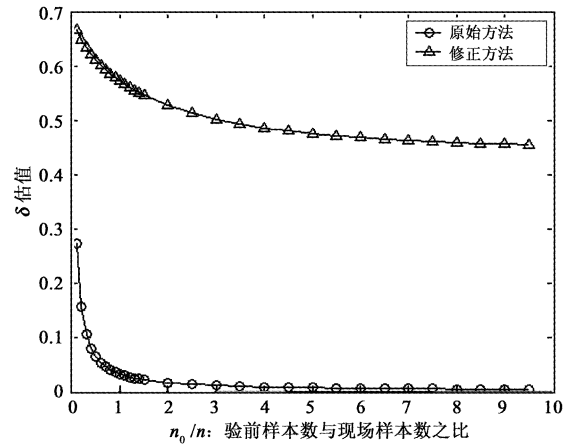


图 1 样本容量对幂参数验后估计的影响
Fig.1 Effect of sample capacity acting on power parameter post estimation

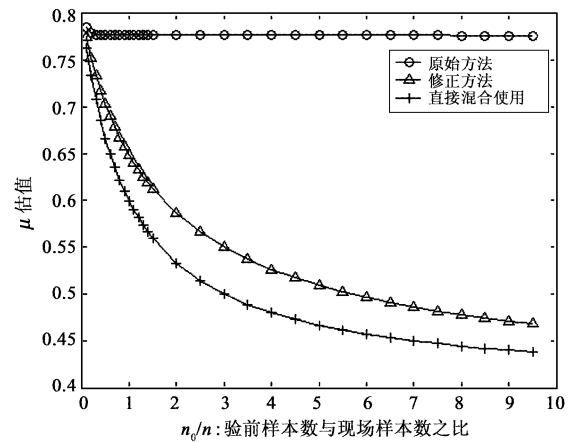


图 2 样本容量对均值验后估计的影响
Fig.2 Effect of sample capacity acting on post estimation

第二种情况:均值差异对验后估计的影响。令 $n = 10$, 而 $n_0 = 10$, 同时 $\sigma_0^2 = 1, \mu = 0.8, \sigma^2 = 1.5$, 分析 μ_0 变化时 δ 以及验后均值、方差的点估计变化曲线。

第三种情况:验前、现场方差差异对验后参数估计的影响。令 $n = 10, n_0 = 10$, 同时 $\mu_0 = 0.4, \mu = 0.8, \sigma^2 = 1, \sigma_0^2$ 变化。分析 δ 以及验后均值、方差的点估计变化曲线。

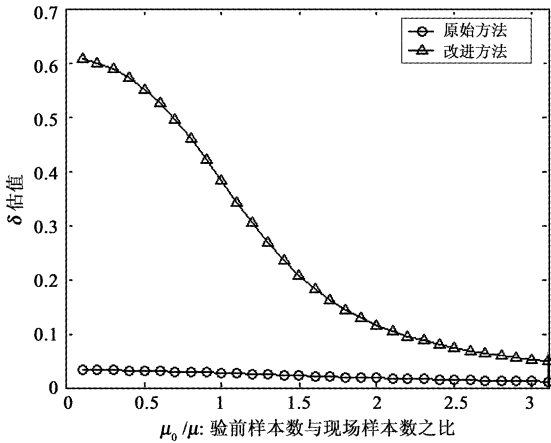


图 3 均值差异对幂参数验后估值的影响
Fig.3 Effect of mean difference acting on power parameter post estimation

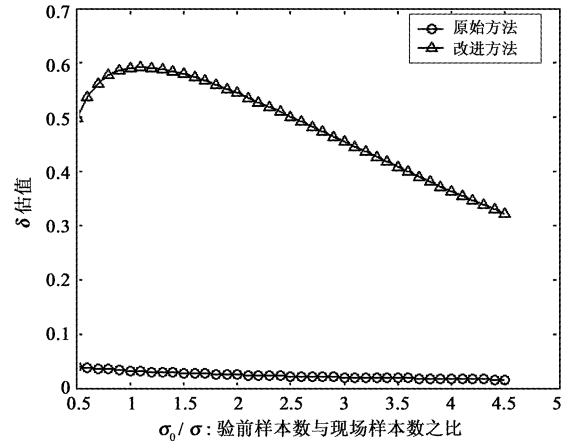


图 5 方差差异对幂参数验后估值的影响
Fig.5 Effect of variance difference acting on power parameter post estimation

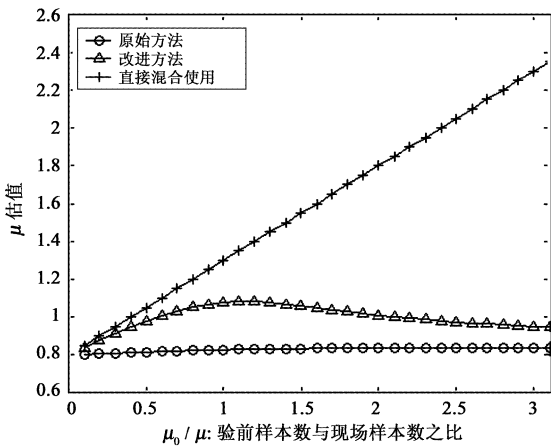


图 4 均值差异对均值验后估计的影响
Fig.4 Effect of mean difference acting on post estimation

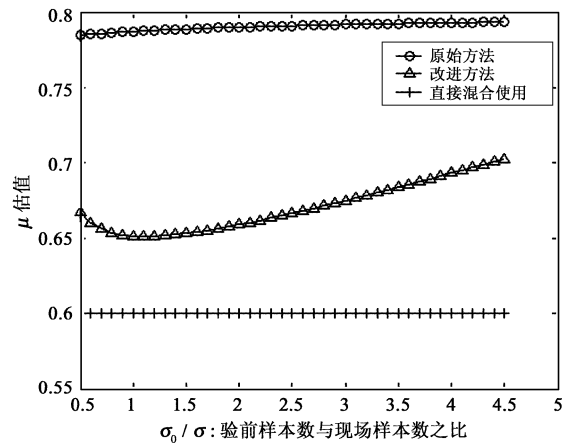


图 6 方差差异对均值验后估计的影响
Fig.6 Effect of variance difference acting on post estimation

从图 1 至图 6 可以得出以下结论:

(1) 原始幂验前方法中, 幂参数 δ 的估值始终比较小, 对应于图 1、图 3、图 5 中, 而修正幂验前方法中, 幂参数 δ 的验后估值对验前信息样本容量、均值、方差的变化比较敏感。原始方法获得的均值验后估计变化很小, 始终与现场信息比较接近, 但相对于直接混合使用验前、现场信息的方法, 均值验后估计有明显的改善。

(2) 修正幂验前方法中, 幂参数 δ 的估值与验前、现场信息的样本容量、统计特性有关, 从图 1 可以看出, 随着验前样本容量的增大, δ 的验后估值变小。从图 3、图 5 中可以看出, 验前信息与现场信息统计特性真值相差越大(一致性越差), δ 的估值越小, 也就是说, 验前信息对兴趣参数 θ 验后估计的影响越小,

此时 θ 的验后估计逐渐向现场信息统计特性靠近, 不会出现验前信息“淹没”现场信息的情况。

4 MSE 分析

前面的分析表明, 修正幂验前分布能够有效避免验前信息“淹没”现场信息的问题, 但是, 使用验前信息是否能够提高验后估计的性质, 还需要进一步的分析。

下面主要分析原始幂验前方法与修正幂验前方法对估计的 MSE 的影响。假设验前信息服从 $N(\mu_0, \sigma_0)$ 分布, 现场信息服从 $N(\mu, \sigma)$, 通过 Monte-Carlo 方法比较两种方法的 MSE。对于均值的估计而言, μ 的 Bayes 估计为 $\hat{\mu}$, 则估计的 MSE 为 $MSE(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu} - \mu)^2 = Var(\hat{\mu}) + (E[\hat{\mu}] - \mu)^2$

上式第一项表示估值的方差, 验前样本数量越多, 估值方差越小; 第二项表示估值偏倚, 如果验前均值是有偏的, 那么验前样本数量越多, 估值偏倚越大。

实际上, $MSE(\hat{\mu})$ 与 $n_0, n, \mu_0, \mu, \sigma_0, \sigma$ 都有关系, 假设 $n = 10, \sigma_0 = \sigma$ 。根据上述参数抽样参数验前样本与现场样本, 分别在 $(\mu_0 - \mu)/\sigma = 0.2, (\mu_0 - \mu)/\sigma = 0.4, (\mu_0 - \mu)/\sigma = 0.6$ 三种情况下计算两种幂验前方法下参数的验后估计, 共进行 5000 次仿真, 计算结果见图 7, 图中实线为原始幂验前方法计算结果、虚线为修正幂验前方法计算结果。

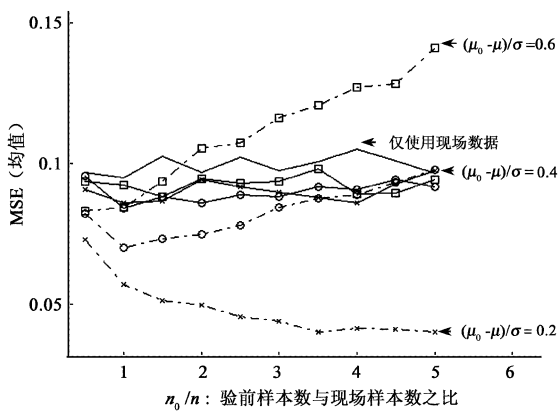


图 7 验前信息、现场信息差异对验后估计的影响
Fig. 7 MSE of post estimation on different parameters combination

图 7 表示 n_0/n 从 0.5 变化至 5 时验后均值估

计的 MSE 变化曲线。从图中可以看出:

(1) 在 $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 不变的情况下, 验后估计的 MSE 与 $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 本身的值有关。当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma \leq 0.4$ 时, 随着 n_0 的增大, 均值验后估计的 MSE 减小, 在 $n_0/n \geq 3.5$ 时, 均值验后估计的 MSE 不再减小, 而是趋于稳定。

(2) 当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma = 0.4$ 且 $n_0/n = 1$ 时, MSE 最小, 然后随着 n_0/n 的增大而迅速增大, 这一点称之为“趋势转折点 1”; 在 $n_0/n = 4$ 时, 修正方法得到的 MSE 与原始方法得到的 MSE 基本相等, 这一点称之为“趋势转折点 2”; 当 $n_0/n > 5$ 时, 修正方法得到的 MSE 大于原始方法。

(3) 当 $(\mu_0 - \mu)/\sigma > 0.4$ 时, 均值验后估计的 MSE 始终比原始方法要大。

(4) 作为对比, 对于原始幂验前方法, 当验前样本数 n_0 增大时, 验后均值估计的 MSE 基本不变, 而 $(\mu_0 - \mu)/\sigma$ 不同时, 验后均值估计的 MSE 稍有增大, 但并不明显。也就是说, 对于原始幂验前方法, 验前信息对验后估值的影响比较有限, 主要原因在于幂参数 δ 的验后估计很小。

前面已经指出, $MSE(\hat{\mu})$ 与 $n_0, n, \mu_0, \mu, \sigma_0, \sigma$ 都有关系。下面在不同的参数组合情况下进行同样的仿真, 可以得到与前面类似的结论。表 1 给出了修正幂验前方法验后估计 MSE 比仅利用现场信息小时的参数组合。

表 1 修正幂验前方法下优化的参数组合

Table 1 Optimal parameters combination at modified power prior method

σ	参数组合		趋势转折点 1		趋势转折点 2	
	σ_0/σ	n	$(\mu_0 - \mu)/\sigma$	n_0/n	$(\mu_0 - \mu)/\sigma$	n_0/n
1	1	10	0.4	1	0.4	4
1	1	20	0.3	1	0.3	3.5
1	1	5	0.5	1	0.5	4.5
1	1.5	10	0.4	1.5	0.4	2
1	1.5	20	0.3	1	0.3	4
1	1.5	5	0.3	1.5	0.3	4.5

上述结论的意义在于对验前信息的应用提出了一定的要求。在验前信息与现场信息的相容性较好时 ($(\mu_0 - \mu)/\sigma < 0.4$), 在 Bayes 修正幂验前方法下, 适当增大验前样本数目可以降低均值估计的 MSE; 当验前信息与现场信息的相容性较差时 ($(\mu_0 - \mu)/\sigma > 0.4$), 单纯增加样本数目不会改进估计

的 MSE, 在这种情况下, 验前样本的应用必需慎重。

5 结束语

(1) 针对导弹制导精度评定中验前信息的合理运用问题, 将幂验前分布及其改进方法应用于精度评定多源信息综合中, 并利用 Bayes 方法获得了兴

趣参数的验后估计,而幂参数可根据验后边缘分布得到。该方法中所有参数都根据 Bayes 统计推断得到,无需主观经验。

(2) 根据对幂验前方法、修正幂验前方法、经典 Bayes 直接融合方法等的对比分析说明,修正幂验前方法能够有效避免验前信息“淹没”现场信息的问题。

(3) 在不同参数组合情况下利用 MonteCarlo 方法计算了修正幂验前方法下验后估计的 MSE,通过与现场信息的真实 MSE 比较,给出了验前信息利用的基本原则,在该原则之下,利用验前信息能够改进兴趣参数的验后估计。

参考文献:

- [1] 张金槐,唐雪梅. Bayes 方法[M]. 国防科技大学出版社,1995 年第二版. [ZHANG Jin-huai, TANG Xue-mei. Bayesian Method [M]. National University of Defense Technology Press, 1995.]
- [2] 张湘平,张金槐,谢红卫. 关于样本容量、验前信息与 Bayes 决策风险的若干讨论[J]. 电子学报,2003, 31(4): 536 - 538. [ZHANG Xiang-ping, ZHANG Jin-huai, XIE Hong-wei. A few discussion of samples, a prior information and bayesian statistical decision [J]. Acta Electronica Sinca, 2003, 31(4): 536 - 538.]
- [3] Ibrahim J G, Chen M H, Sinha D. On optimality properties of the power prior[J]. Journal of the American Statistical Association, 2003, 98: 204 - 213.
- [4] Ibrahim J G, Chen M H. Power prior distributions for regression models[J]. Statistical Science, 2000, 15: 46 - 60.
- [5] Yuyan Duan. A modified bayesian power prior approach with applications in water quality evaluation[D]. Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005, 11.
- [6] 杨华波,张士峰,蔡洪. 利用构造性仿真进行导弹精度评估[J]. 国防科技大学学报,2005, 27(2): 27 - 30. [YANG Hua-bo, ZHANG Shi-feng, CAI Hong. Evaluation of missile precision by using construction simulation[J]. National University of Defense Technology Press, 2005, 27(2): 27 - 30.]

作者简介:杨华波(1980 -),男,博士研究生,主要从事可靠性、精度评定及惯性技术方面的研究。

通信地址:湖南长沙国防科技大学一院六队(410073)

电话:13548594063

E-mail:yhang0731@mailme.cn

A Bayesian Modified Power Prior Approach with Applications in Guidance Precision Evaluation

YANG Hua-bo, XIA Qing, ZHANG Shi-feng, CAI Hong

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: How to use prior information effectively and reasonably in Bayesian method, which is a critical problem in small sample evaluation. For evaluation if the guidance precise of missile, the paper introduces power prior parameter to control the effect of the prior information acting on the post estimation, and deduces detailedly post density function of interesting parameters by Bayesian method based on the modified power prior distribution. The new method can avoid effectively the scene that the prior data inundate the post data through analyzing the posterior estimation of interesting parameters, at the same time, the power parameter can be obtained from posterior marginal distribution. Some elementary principles about using the prior data are brought forward through calculating the mean square error of post estimation.

Key words: Bayes approach; Small sample; Power prior; Precision evaluation; Marginal distribution