

基于整体推断的 Bayes 方法及其在精度评定中的应用

曹 渊, 胡正东, 郭才发, 张士峰

(国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073)

摘 要: 验前分布的表示及验前信息的融合是 Bayes 小子样理论应用中的关键问题。根据同一型号武器试验中不同状态下信息的横向互补特性, 提出一种多源信息的整体推断方法, 将 Dirichlet 分布引入多源信息权重系数的验前信息中, 建立基于 Bayes 网络的权重系数推断模型, 利用 MCMC 方法更新所有节点信息, 得到了合理的权重系数验后分布, 解决了多源信息加权融合中权重系数难以确定的问题。仿真结果表明, 该方法可以有效地融合验前分布, 在精度评定中有一定的应用前景。

关键词: Bayes; 整体推断; MCMC; 精度评定

中图分类号: V41

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328(2009)06-2354-06

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.06.049

0 引言

利用 Bayes 方法对武器系统进行精度评定时, 一个突出的优点就是充分运用了验前信息。随着信息获取手段和计算机仿真技术的不断发展, 人们在进行统计推断时可以利用的相关信息越来越多, 但同时由于试验费用和组织等方面的原因, 标准技术状态下的系统级的试验越来越少, 需要充分利用验前信息。因此, 复杂的小子样统计推断问题和验前信息有很大关系, 而利用这些相关验前信息越充分, 就越能保证统计推断的置信程度。

验前信息的形式和性质多种多样, 如何将多源验前信息进行分析处理成为 Bayes 方法应用中的一个关键问题。文献[2]从限制样本容量的角度出发, 讨论了多源异总体信息融合问题; 文献[3]引入验前可信度的思想将验前信息与现场试验信息融合, 给出了多源信息下的 Bayes 精度鉴定方案。文献[4]将不同状态下的试验信息结合作为一个整体, 按照极大似然的思想进行统计推断, 并给出了多元正态分布均值和协方差矩阵的整体估计, 文献[5]将该方法进一步推广至导弹命中精度参数的整体推断。文献[6]提出了一种基于 Bayes 网络的多源信息融合

方法, 实现了不同条件下试验信息的折合。

本文在多源验前信息加权融合的基础上, 提出一种基于多元 Dirichlet 验前分布的权重系数整体推断模型, 并将该模型应用于精度评定中, 实现多源信息融合下精度指标的统计推断。

1 MCMC 方法及 Gibbs 抽样

在统计模型的 Bayes 分析过程中, 对总体参数的统计推断, 会遇到对高维概率分布作积分的复杂问题, 这使 Bayes 方法的应用受到了极大的限制。随着计算机技术的发展和 Bayes 方法的改进, 特别是 MCMC 方法的发展和应用, 原先异常复杂的高维计算问题随之迎刃而解, 很大程度上方便了参数的后验推断问题, 极大地促进了 Bayes 理论的推广应用。MCMC 方法是一种特殊的蒙特卡罗积分模拟方法, 它将随机过程中的马尔科夫过程引入到蒙特卡罗模拟中, 实现动态模拟(即抽样分布随模拟的进行而改变), 从而建立平稳分布为 $\pi(\theta)$ 的 Markov 链来得到 $\pi(\theta)$ 的样本, 基于这些样本就可以作各种统计推断。本质上, MCMC 方法是使用 Markov 链的蒙特卡罗模拟积分。

Gibbs 抽样是一种特殊的 MCMC 方法, 可以广泛

应用到一大类 Bayes 问题中。Gibbs 抽样的关键是只考虑一元条件分布,也就是说除了一个变量外,所有的随机变量都赋予固定值的分布。这种条件分布比复杂的联合分布容易模拟,且通常具有简单的形式(通常是正态, χ^2 分布,或其它常见的先验分布)。该方法是从 n 个一元条件分布依次模拟 n 个随机变量来产生一个单独的 n 维向量,从而实现满条件分布抽样。

2 多元 Dirichlet 验前分布整体推断模型

同一型号的导弹等武器系统,由于发射条件、目标机动等试验条件的差异,会导致射击偏差数据的不同。但是,它们作为不同试验条件下的数据,相互之间可以提供互补的横向信息。如果对某一状态下的现场试验数据进行验后推断时,合理利用这些横向信息不仅可以扩充可以利用的验前信息,还可以实现对射击精度参数的联合推断。为此本文提出一种不同状态下小子样信息的整体融合方法。

2.1 多源验前信息的加权融合

假设有 m 个试验信息源, $x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ 。同时获取了 n 个现场试验子样 x_1, \dots, x_n 。记 $\pi_i(\theta)$ 为通过验前数据 $x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ 求得的试验数据 x 的验前分布,融合后的验前分布记为 $\pi(\theta)$, 即有:

$$\pi(\theta) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i \pi_i(\theta), \sum_{i=1}^m \epsilon_i = 1 \quad (1)$$

式中, ϵ_i 为每种信息源的权重系数。

利用 Bayes 公式可以获得 θ 的验后分布:

$$\pi(\theta | X) = \frac{1}{m(X | \pi)} \sum_{i=1}^m \epsilon_i \pi_i(\theta | X) m(X | \pi_i) \quad (2)$$

其中
$$m(X | \pi) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i m(X | \pi_i) \quad (3)$$

记 $\lambda_i = \frac{\epsilon_i m(X | \pi_i)}{m(X | \pi)} (i = 1, \dots, m)$, 于是验后分布为:

$$\pi(\theta | X) = \lambda_1 \pi_1(\theta | X) + \dots + \lambda_m \pi_m(\theta | X) \quad (4)$$

这样,验后密度函数为不同验前信息源之下的验后密度的加权和。利用这种验后密度函数进行 Bayes 统计决策分析将会带来许多方便。

2.2 精度评定的 Bayes 方法

对武器的精度进行评定时,需给出精度指标的精确估计,飞行器在试验中的射击偏差用 (X, Y, Z) 表示, $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2), Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$ 。其中 μ_x, μ_y, μ_z 表示系统误差造成的射击偏差,也叫做射击准确度, $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ 表示在三个方向散布的大小(随机偏差),称为射击密集度。下面以 X 方向为例说明对射击的系统偏差和随机偏差进行 Bayes 估计。

设系统偏差 μ_x 的验前密度为正态分布密度函数;记随机偏差 $\sigma_x^2 \triangleq D_x$, 设 D_x 的验前密度为逆 Gamma 密度函数。假定在试验数据之前没有经验信息,即认为无先验信息的情况,选择无信息先验分布

$$\pi(X) = \pi(\mu_x, D_x) = \frac{1}{D_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (5)$$

获得某一试验条件下的射击子样 $x_1^0, \dots, x_{n_0}^0$ 后, μ_x 的验前概率密度为 $N(\bar{x}^0, \eta_0 D_x)$, 其中

$$\eta_0 = \frac{1}{n_0}, \bar{x}^0 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} x_i^0 \quad (6)$$

记 D_x 的验前概率密度为: $g(D_x; a_0, b_0)$, 其中

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_0} (x_i^0 - \bar{x}^0)^2, b_0 = \frac{n_0 - 1}{2} \quad (7)$$

(μ_x, D_x) 的联合验前为正态—逆 Gamma 分布。当得到另外 n 个现场试验信息 x_1, \dots, x_n 时, (μ_x, D_x) 的验前与验后分布是共轭的,仍然是正态—逆 gamma 分布,即:

$$\pi(\mu_x, D_x | X) \propto D_x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 D_x} (\mu_x - \mu_1)^2} D_x^{-(b_1+1)} e^{-\frac{u}{D_x}} \quad (8)$$

其中

$$\eta_1 = \frac{1}{n + 1/\eta_0} = \frac{1}{n + n_0},$$

$$a_1 = a_0 + \frac{n}{2} u + \frac{1}{2} \frac{n(\bar{x} - \bar{x}^0)^2}{n\eta_0 + 1},$$

$$\mu_1 = \frac{n\bar{x} + n_0\bar{x}^0}{n + n_0},$$

$$b_1 = b_0 + \frac{n}{2},$$

$$u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

μ_x 的验后边缘密度函数为:

$$\pi(\mu_x | X) = \int_0^\infty \pi(\mu_x, D_x | X) dD_x$$

$$\propto \left[1 + \frac{1}{2} b_1 \frac{b_1}{a_1 \eta} (\mu_x - \mu_1)^2 \right]^{-\frac{2b_1+1}{2}} \quad (9)$$

作变换后可得:

$$\hat{\mu}_x = \mu_1$$

$$\text{Var}(\hat{\mu}_x) = \frac{a_1 \eta}{b_1 - 1} \quad (10)$$

D_x 的验后边缘密度函数为:

$$\pi(D_x | X) \propto \int_{-\infty}^\infty \pi(\mu_x, D_x | X) dx$$

$$= \frac{a_1^{b_1}}{\Gamma(b_1)} D_x^{-(b_1+1)} e^{-\frac{a_1}{D_x}} \quad (11)$$

它是逆 Gamma 分布的密度函数,因此:

$$\begin{cases} \hat{D}_x = \frac{a_1}{c_1 - 1} \\ \text{Var}(\hat{D}_x) = \frac{a_1^2}{(b_1 - 1)^2 (b_1 - 2)} \end{cases} \quad (12)$$

2.3 基于多元 Dirichlet 分布的多层 Bayes 模型

由于各类不同的验前信息在验后推断中所起的作用不同,因此引入验前信息加权融合的方法,但是,传统的信息权重系数都是以固定的参数形式出现,而且这些参数之间没有内在联系,这样会忽略多源试验数据的横向信息,如果将所有的权重系数作为一个整体,以多元分布参数的形式给出,则可能有效地开发不同信息之间的内在联系。

从共轭验前分布的思想出发,为避免引入过多的主观因素,选用多元 Dirichlet 分布为权重系数的验前分布,下面首先简述多元 Dirichlet 分布的定义及一种构造 Dirichlet 分布样本的方法。

设随机变量 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 服从多元 Dirichlet 分布 $D(\bar{\theta})$, 其中 $\sum_{i=1}^n x_i = 1, 0 \leq x_i \leq 1; \bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, 其中 $\theta_i > 0$, 对所有的 i , 定义 $\theta_0 = \sum_{i=1}^n \theta_i$, X 的概率密度函数为:

$$f(X | \bar{\theta}) = \frac{\Gamma(\theta_0)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\theta_i)} \prod_{i=1}^n x_i^{\theta_i - 1} \quad (13)$$

x_i 的均值为 θ_i / θ_0 , 方差为 $(\theta_0 - \theta_i) \theta_i / \theta_0^2 (\theta_0 + 1)$ 。

假定 $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ 独立, 其分布为 $gamma(\theta_i, 1)$, 令 $k_i = z_i / \sum_{i=1}^n z_i, k_i$ 服从 Dirichlet 分

布 $D(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 。这样通过 gamma 分布的样本, 就可以得到 Dirichlet 分布的样本 $k_i, i = 1, \dots, n$ 。

因为 $\sum_{i=1}^n x_i = 1, 0 \leq x_i \leq 1$, Dirichlet 分布实际上是 $(n - 1)$ 维的分布,符合权重系数之和为 1 的约束,而且满足共轭验前分布的要求。因此,以 Dirichlet 分布作为权重系数的验前分布,是较为合适的。

在导弹射击试验中,由于射击条件差异会导致射击精度的系统偏差等参数的不同,假定射击偏差服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 不同射击条件下的系统偏差 μ 不同,而随机偏差 σ 相同。根据 Bayes 公式,利用不同条件下的试验数据 X_i 及其验前分布,获得的系统偏差的分布分别为:

$$\pi_i(\mu | X_i) = \frac{\pi_i(X_i | \mu) \pi_i(\mu)}{\int \pi_i(X_i | \mu) \pi_i(\mu) d\mu}$$

$$\propto \pi_i(X_i | \mu) \pi_i(\mu) \quad (14)$$

则加权混合的验前分布为:

$$\pi(\mu) = \sum_{i=1}^n k_i \pi_i(\mu | X_i) \quad (15)$$

将权重系数 k_i 视为服从多元 Dirichlet 分布的随机变量,参数 (μ, k_1, \dots, k_n) 的联合验前分布为:

$$\pi(\mu, k_1, \dots, k_n) = \left(\sum_{i=1}^n k_i \pi_i(\mu | X_i) \right) \cdot \frac{\Gamma(\theta_0)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\theta_i)} \prod_{i=1}^n k_i^{\theta_i - 1} \quad (16)$$

其中 $\theta_i, i = 1, \dots, n$, 是验前分布的超参数,根据多层先验的思想,可以取 θ_i 的分布为均匀分布,初值为: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots, \alpha_n = \frac{1}{n}$ 。 D_x 的验前分布为 $g(D_x; a_0, b_0)$, 其中

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (x_i^j - \bar{x})^2,$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i - 1 \right) \quad (17)$$

m_i 表示射击偏差样本 X_i 的样本容量, x_i^j 表示 X_i 中的数据。根据现场打靶信息得到射击精度参数的多层 Bayes 验后分布推断模型为:

$$\pi(\mu_x, D_x, k_1, \dots, k_n, \theta_1, \dots, \theta_n | X)$$

$$\propto \pi(X | \mu_x, D_x, k_1, \dots, k_n) \times$$

$$\left(\prod_{i=1}^n k_i \pi_i(\mu_x | X_i) \right) \times \frac{\Gamma(\theta_0)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\theta_i)} \times \prod_{i=1}^n k_i^{\alpha_i-1} \times IG(a_0, b_0) \quad (18)$$

上述分布模型形式复杂,直接利用高维积分难以获得参数的解析表示,因此可以采用多层 Bayes 网络进行建模,将所有变量之间的联系用 Bayes 网络描述,然后用 Gibbs 抽样获取参数验后分布的近似估计,具体方法以仿真实例说明。

似估计,具体方法以仿真实例说明。

3 精度评定中的应用分析

假定某型防空导弹在鉴定试验之前,已经对不同空域的目标进行过射击试验,获得了诸如高远、高近、低远、低近等空域目标的射击试验偏差数据,此外还获得了上述各类射击状态下系统偏差的验前分布信息,所有验前信息及现场鉴定试验数据见表 1。

表 1 试验数据及系统偏差的验前分布

Table 1 Testing data and the prior distributions of system error

不同条件下的试验数据 (X_i)	系统偏差的验前分布 $\pi_i(\mu)$	现场打靶数据	系统偏差的验后分布 $\pi(\mu)$
4.5597, 5.0897, 3.2621, 4.6232, 3.4848, 4.5950	$N_1(4.2, 0.3)$		
4.2954, 5.0220, 4.7608, 3.6039, 4.8269, 4.0435	$N_2(4.5, 0.4)$	3.6398, 4.4538, 3.1622,	未知
3.8330, 5.0884, 4.6651, 6.8852, 4.0746, 6.8349	$N_3(5.3, 0.4)$	6.0680, 5.2209, 5.0487	
5.4001, 6.4221, 5.1811, 5.0983, 5.5206, 5.3417	$N_4(5.7, 0.3)$		

根据已知信息,建立多层 Bayes 网络如图 1 所示。其中参数 $\theta_i, i = 1, \dots, 4$ 服从均匀分布, (按 2.3 节产生 Dirichlet 分布样本的方法, 令 $z_i \sim \text{Gamma}(\theta_i, 1), k_i = z_i / \sum_{i=1}^n z_i$) 多源验前分布的权重系 $k_i, i = 1, \dots, 4$ 服从多元 Dirichlet 分布 $D(\theta_1, \dots, \theta_4)$, 系统偏差 μ_i 的验前分布为正态分布, 随机偏差 D 的验前分布为逆 Gamma 分布 $g(D_x; a_0, b_0)$, 验前

分布参数 a_0, b_0 按照 2.2 节中的方法计算。给定 Bayes 网络中的随机变量初值后, 进行 Gibbs 抽样, 迭代 30000 次, 利用充分混合后的链轨迹(从 10001 次开始)进行参数推断, 各参数的推断结果见表 2; 现场试验系统偏差 μ 的马尔科夫链轨迹为图 2; 图 3 和 4 给出了系统偏差以及随机偏差的核密度估计和 95% 的置信区间估计。

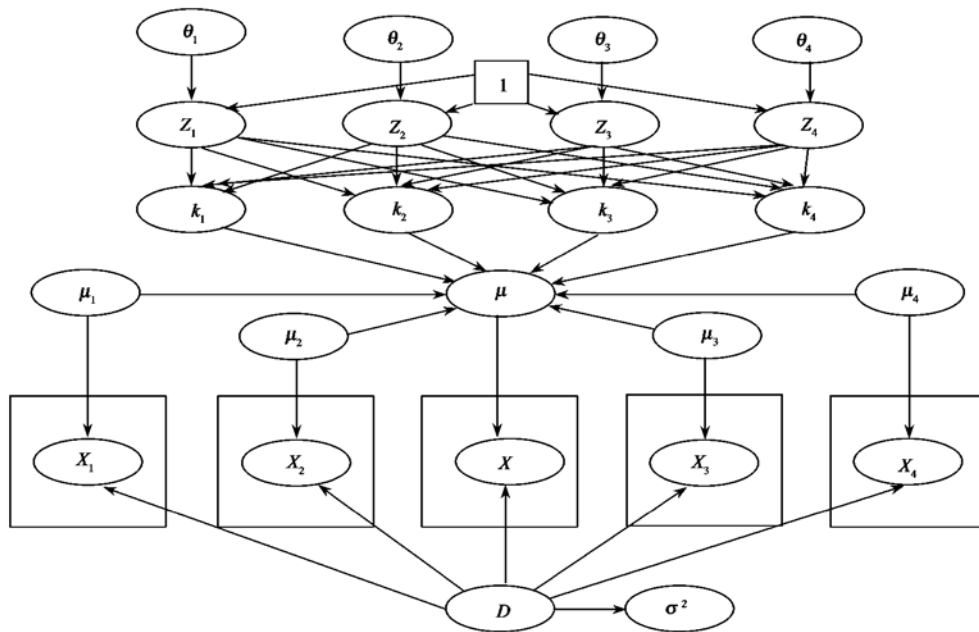


图 1 多源信息融合的 Bayes 网络

Fig.1 Bayesian network for multi-source information fusion

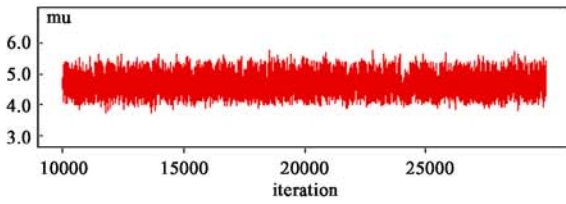


图 2 系统偏差 μ 的稳态马尔可夫链
Fig.2 Steady-state markov chain for μ

从图 2 可以看出,从 10001 次开始的马尔可夫链混合充分,达到了稳态模拟的要求,可以利用迭代链的数据进行参数统计推断。

根据不同射击条件下的的系统偏差 μ_i , 以及表中权重系数 k_i 的验后推断,可以计算得到加权的验前分布为: $\pi(\mu) = \sum_{i=1}^4 k_i \pi_i(\mu) = N(4.62, 0.67^2)$ 。可以看出,与每个验前分布中的均值相比,多源融合

验前分布中的均值更接近真实值。利用该多源验前分布,通过 Bayes 网络更新,可得表 2 中 μ 的验后分布: $N(4.678, 0.2888^2)$ 。如果仅用单个验前分布推断现场打靶数据的系统偏差 μ , 通过 Bayes 方法计算得 μ 的验后分布分别为: $N(4.27, 0.13^2)$, $N(4.42, 0.16^2)$, $N(5.23, 0.13^2)$, $N(5.49, 0.13^2)$ 。对比可知,利用加权后的验前分布对现场试验数据进行推断时,得到的系统偏差 μ 的推断误差大为降低,验前信息的可信度得到提高。此外,如果不考虑验前分布的差异,即权重系数 $k_i = 0.25, i = 1, \dots, 4$, 加权验前分布为 $N(4.9, 0.325^2)$, 此时可以得到 μ 的验后分布为 $N(4.85, 0.1375^2)$ 。可以看出,不考虑验前信息差异时,验后推断的结果较差,甚至不如利用单一验前分布时做出的验后推断,这也说明了必须根据试验信息合理选择权重系数。

表 2 变量的统计推断结果

Table 2 Statistical and inference results of variables

参数	真值	验前均值	验前方差	验后均值	验后方差	95% 的置信区间
k_1	\	\	\	0.322	0.32	$[1e-6, 0.97]$
k_2	\	\	\	0.342	0.33	$[1e-6, 0.98]$
k_3	\	\	\	0.233	0.279	$[8e-9, 0.94]$
k_4	\	\	\	0.104	0.177	$[0, 0.64]$
μ_1	\	4.2	0.3	4.237	0.229	$[3.79, 4.68]$
μ_2	\	4.5	0.4	4.458	0.249	$[3.97, 4.94]$
μ_3	\	5.3	0.3	5.244	0.236	$[4.79, 5.71]$
μ_4	\	5.7	0.3	5.594	0.236	$[5.13, 6.05]$
μ	4.7	0	1e3	4.678	0.289	$[4.16, 5.28]$
σ^2	1	0	1e3	0.78	0.222	$[0.46, 1.32]$

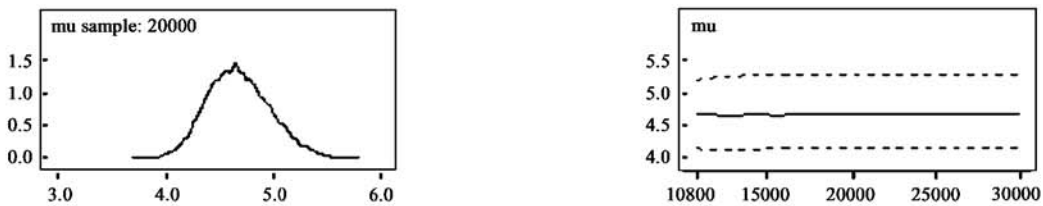


图 3 系统偏差 μ 的核密度估计和 95% 的置信区间
Fig.3 Kernel density and 95% confidence interval of μ

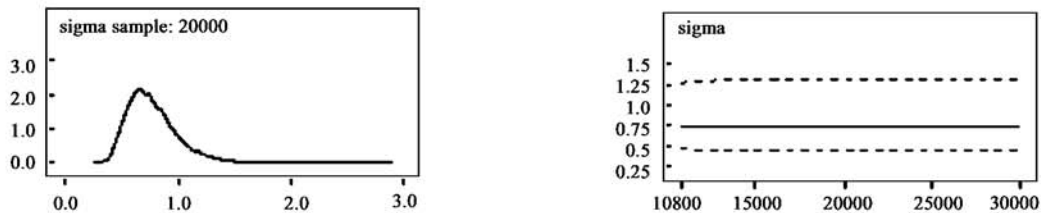


图 4 随机偏差 σ 的核密度估计和 95% 的置信区间
Fig.4 Kernel density and 95% confidence interval of σ

以上分析表明,引入多元 Dirichlet 分布作为权重系数的验前分布模型,利用 Bayes 网络将所有权重参数作为整体进行统计推断,各节点的更新信息传播到了整个网络,大大增加了可供统计推断的信息。因此,不仅系统偏差 μ 的验后估计更加合理,而且针对各验前信息的差异确定出不同的权重因子,有效地融合了多源验前信息,提高了精度评定的可信度。

4 小结

针对验前信息的异总体特性,结合多源信息加权融合的思想,本文提出了一种基于多元 Dirichlet 分布的权重系数整体推断模型,有效地利用多源验前信息之间的联系,充分开发不同状态下的横向试验信息,能够对精度指标作出合理有效地估计,为导弹鉴定及作战效能评估提供科学依据。仿真结果表明该方法较为有效,可以提高统计推断的精度。进一步的研究工作将在以下两方面展开:结合验前信息的可信度确定 Dirichlet 分布中的超参数信息,增加验后估计的稳健性;研究该方法在可靠性试验参数推断中的应用问题等。

参考文献:

- [1] 蔡洪,张士峰,张金槐. Bayes 试验分析与评估[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2004. [CAI Hong, ZHANG Shi-feng, ZHANG Jin-huai. Bayesian Test Analysis and Evaluation[M]. Changsha: National University of Defence Technology Publishing Press, 2004.]
- [2] 张士峰,蔡洪. Bayes 分析中的多源信息融合问题[J]. 系统仿真学报,2001,12(1):54-57. [ZHANG Shi-feng, CAI Hong. Fusion of information of multiple source in bayesian analysis[J]. Journal of System Simulation, 2000, 12(1):54-57.]
- [3] 张金槐. 多源信息的 Bayes 融合精度鉴定方法[J]. 国防科技大学学报,2001,23(3):93-97. [ZHANG Jin-huai. Accuracy detection method using bayesian multi-sensor data fusion technique [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2001, 23(3):93-97.]
- [4] 傅惠民. 多元正态分布整体推断方法[J]. 航空动力学报,2005,(6):905-909. [FU Hui-min. Integral inference method for multivariate normal distributions [J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(6):905-909.]
- [5] 傅惠民. 导弹命中精度整体推断方法[J]. 北京航空航天大学学报,2006,(10):1141-1145. [FU Hui-min. Integral inference method for missile hit accuracy [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(10):1141-1145.]
- [6] 胡正东,李鹏奎,张士峰,蔡洪. 基于 Bayes 网络的惯导系统多源试验信息融合方法[J]. 宇航学报,2008,29(1):215-219. [HU Zheng-dong, LI Peng-kui, ZHANG Shi-feng, CAI Hong. Method of multi-source testing information fusion for inertial navigation system based on bayesian network [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(1):215-219.]
- [7] David PMS. Actuarial modeling with MCMC and BUGS [J]. North American Actuarial Journal, 2001, 5(2):96-12.

作者简介:曹渊(1984-),男,国防科学技术大学航天与材料工程学院博士研究生,研究方向为武器系统导弹精度评估。
通信地址:湖南省长沙市国防科学技术大学一院六队(410073)
电话:13548577745
E-mail:cao-yuan2008@yahoo.com.cn

The Bayesian Integral Inference Method and Its Application in Accuracy Evaluation

CAO Yuan, HU Zheng-dong, GUO Cai-fa, ZHANG Shi-feng

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The expression of prior distribution and prior information fusion are great importance in Bayesian theory's application. An approach about the integral inference of prior information is proposed based on one type weapon's complimentary test information in different conditions. The Dirichlet distribution is introduced as the prior distribution of importance factors in multi-source information and the inference model for importance factors are established by Bayesian networks. The posterior distribution can be obtained reasonably through the updated nodes by MCMC method. Hence, the problem of importance factors inference is settled. Simulation results show that this approach is able to fuse the prior distributions effectively and has a bright application prospect in accuracy evaluation.

Key words: Bayes; Integral inference; MCMC; Accuracy evaluation