第 44 卷 第 10 期
Vol.44 No.10

山东大学学报（理学版）
Journal of Shandong University(Natural Science)

2009 年 10 月
Oct. 2009

文章编号:1671-9352(2009)10-0051-03

Ω-滤子的一个等价刻画

李令强,金秋
(聊城大学数学学院,山东 聊城 252059)

摘要:对滤子公理进行重新解释,给出了文献[1]引入的 Ω-滤子的一个等价刻画。
关键词:完备剩余格;模糊集;Ω-滤子
中图分类号:O159.1 **文献标志码**:A

An equivalent characterization of Ω-filter

LI Ling-qiang, JIN Qiu
(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, China)

Abstract: We reinterpret the axioms of filters, and give an equivalent characterization of Ω-filters investigated in reference [1].
Key words: complete residuated lattice; fuzzy set; Ω-filter

1 前言和预备知识

滤子是刻画拓扑的重要工具之一。一般地,集合 X 上的滤子 F 可以看作完备格 $(P(X),\subseteq)$ 的满足下列条件的子结构:(1) $\emptyset\notin F$;(2) F 对有限交封闭;(3) F 为 $(P(X),\subseteq)$ 中的上集。文献[1]以多值逻辑为基础,通过给出上述公理的多值解释,引入了一种多值滤子——Ω-滤子。注意到滤子 F 也可以看作从 2^X 到 2 的函数满足:(1) $F(\emptyset)=0, F(X)=1$;(2) 对任意 $A,B\in 2^X$, $F(A\cap B)=F(A)\wedge F(B)$。因为 $\emptyset$ 为完备格 $(2^X,\subseteq)$ 的最小元,X 可以看作 2^X 的空子集的交。因此,F 可以看作保持最小元和有限交的函数。本文将从多值逻辑的角度对此进行解释,从而得到 Ω-滤子的一个等价刻画。

一般说来,交换 quantale$(\Omega,*,I)$的单位 I 不一定是完备格 Ω 的最大元 1。称满足该条件(即 $1=I$)的交换 quantale 为完备剩余格[2-3]。如未加说明,本文中 Ω 总假设为完备剩余格。

设 X 为一集合,称映射 $R: X\times X\to\Omega$ 为 X 上的 Ω-预序,如果它满足:(1) $R(a,a)=1$, $\forall a\in X$;(2) $R(a,b)*R(b,c)\leqslant R(a,c)$, $\forall a,b,c\in X$,称序对 (X,R) 为 Ω-预序集。另外,称 R 为 Ω-偏序,如果它还满足(3) $\forall a,b\in X, R(a,b)=R(b,a)=1\Rightarrow a=b$。同经典情形一样,对 X 的任意模糊子集 $\varphi\in\Omega^X$,也可以定义它在 Ω-预序下的交和并,称为模糊交和模糊并,并分别记为 $\inf\varphi$ 和 $\sup\varphi$,$\inf\varphi$ 和 $\sup\varphi$ 均为 X 中的元素。称 Ω-预序 R 为完备的(余完备的),如果对任意 $\varphi\in\Omega^X$ 都有 $\inf\varphi(\sup\varphi)$ 存在。由文献[2],R 为完备的当且仅当它为余完备的。称完备的 Ω-偏序集为完备的 Ω-格。

命题 1.1[1-2] 设 Ω 为完备剩余格,$\to$为 $*$ 运算的剩余运算。

(1) 任取 $a,b\in\Omega$,令 $R(a,b)=a\to b$。(Ω,R)为完备的 Ω-格,且对任意 $\varphi:\Omega\to\Omega$,有

$$\sup\varphi=\bigvee_{x\in\Omega}(\varphi(x)*x),\quad \inf\varphi=\bigvee_{x\in\Omega}(\varphi(x)\to x)。$$

收稿日期:2009-02-20
基金项目:聊城大学博士基金资助课题
作者简介:李令强(1980-),男,博士,讲师,研究方向为多值拓扑.Email:lilingqiang0614@126.com

(2) 设 X 为非空集。任取 $f,g\in\Omega^X$，令$[\Omega^X](f,g)=\bigwedge_{x\in X}(f(x)\to g(x))$。$(\Omega^X,[\Omega^X])$为完备的 Ω-格，且对任意 $\varphi:\Omega^X\to\Omega$，有 $\sup\varphi=\bigvee\limits_{\lambda\in\Omega^X}(\varphi(\lambda)*\lambda)$，$\inf\varphi=\bigvee\limits_{\lambda\in\Omega^X}(\varphi(\lambda)\to\lambda)$。

设 $f:X\to Y$ 为函数，Zadeh 函数 $f^{\to}:\Omega^X\to\Omega^Y$ 定义为：$\forall\lambda\in L^Y,y\in Y$，$f^{\to}(\lambda)(y)=\bigvee\limits_{f(x)=y}\lambda(x)$，称模糊集 $\varphi\in\Omega^X$ 为有限的，如果它的支撑集 $\mathrm{supp}\,\varphi=\{x\in X:\varphi(x)>0\}$为有限集。

定义 1.1 设(X,R)和(Y,S)为完备的 Ω-格，称映射 $f:X\to Y$ 保有限模糊交，如果对任意有限模糊集 $\varphi\in\Omega^X$ 都有$f(\sup\varphi)=\sup f^{\to}(\varphi)$。

另外，未加说明的有关完备剩余格和 Ω-预序的概念和性质见文献[1,2]。

2 主要结果

引理 2.1 设 $f:\Omega^X\to\Omega$ 为一函数，对模糊集 $G:\Omega^X\to\Omega$，有 $\inf f^{\to}(G)=[\Omega^{\Omega^X}](G,f)$。

证明 由命题 1.1(1)及 Zadeh 函数的定义，

$$\inf f^{\to}(G)=\bigwedge_{x\in\Omega}(f^{\to}(G)(x)\to x)=\bigwedge_{x\in\Omega}((\bigvee_{\lambda\in\Omega^X,f(\lambda)=x}G(\lambda))\to x)=$$

$$\bigwedge_{x\in\Omega}\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X,f(\lambda)=x}(G(\lambda)\to x)=\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}(G(\lambda)\to f(\lambda))=[\Omega^{\Omega^X}](G,f),$$

其中第三个等号由文献[1]命题 1.1(7)得到。

注 2.1 上面引理中的$[\Omega^{\Omega^X}]$为命题 1.1(2)中集合取为 Ω^X 的情形。

定义 2.1[1] 设 X 为一集合，称函数 $\tilde F:\Omega^X\to\Omega$ 为集合 X 上的 Ω-滤子，如果 $\tilde F$ 满足

$(\oplus1)$ $\tilde F(0_X)=0$；$(\oplus2)$ 对任意有限模糊集 $G:\Omega^X\to\Omega$，有$[\Omega^{\Omega^X}](G,\tilde F)\leqslant\tilde F(\inf G)$；$(\oplus3)$ 设 $g\in\Omega^X$，$\tilde F(g)=\bigvee_{f\in\Omega^X}[\Omega^X](f,g)*\tilde F(f)$。

其中条件$(\oplus2)$中的模糊集 $\inf G$ 在文献[1]中写做$\bigcap G$。

命题 2.1 设 $\tilde F:\Omega^X\to\Omega$ 为函数，则下列条件等价。

(1) $\tilde F$ 满足$(\otimes)$：对任意有限模糊集 $G:\Omega^X\to\Omega$，有

$$\tilde F(\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\lambda)=\tilde F(\inf G)=\inf\tilde F^{\to}(G)=[\Omega^{\Omega^X}](G,\tilde F)。$$

(2) $\tilde F$ 满足：$(\oplus2)$ 和 $(\oplus3)$。

证明 (1)⇒(2)。显然，$(\otimes)$ 蕴涵 $(\oplus2)$。下证 $(\otimes)$ 蕴涵 $(\oplus3)$。

设 $f,g\in\Omega^X$，定义函数 $G:\Omega^X\to\Omega$ 为：$G(\lambda)=1$，若 $\lambda=f,g$；否则 $G(\lambda)=0$. 则 $\inf G=f\wedge g$，从而

$$\tilde F(f\wedge g)=\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\tilde F(\lambda)=\tilde F(f)\wedge\tilde F(g)。\tag{2.1}$$

设 $f\in\Omega^X,a\in\Omega$，定义函数 $G:\Omega^X\to\Omega$ 为：$G(\lambda)=a$，若 $\lambda=f$；否则 $G(\lambda)=0$，则 $\inf G=a\to f$，从而

$$\tilde F(a\to f)=\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\tilde F(\lambda)=a\to\tilde F(f)。\tag{2.2}$$

设 $f\in\Omega^X,a\in\Omega$。因为 $f\leqslant a\to(a*f)$，且 (2.1) 式蕴含着 $\tilde F$ 是保序的(即 $\lambda\leqslant\mu\Rightarrow\tilde F(\lambda)\leqslant\tilde F(\mu)$)。又由 (2.2) 式得 $\tilde F(f)\leqslant\tilde F(a\to(a*f))=a\to\tilde F(a*f)$，因此，

$$a*\tilde F(f)\leqslant\tilde F(a*f)。\tag{2.3}$$

下证$(\oplus3)$成立。设 $g\in\Omega^X$，任取 $f\in\Omega^X$，令 $a_f=\bigwedge_{x\in X}f(x)\to g(x)=[\Omega^X](f,g)$。注意到 $a_f*f\leqslant g$，由 $\tilde F$ 的保序性及(2.3)式得

$$\bigvee_{f\in\Omega^X}[\Omega^X](f,g)*\tilde F(f)=\bigvee_{f\in\Omega^X}a_f*\tilde F(f)\leqslant\bigvee_{f\in\Omega^X}\tilde F(a_f*f)\leqslant\tilde F(g);$$

另一方面，$\bigvee_{f\in\Omega^X}[\Omega^X](f,g)*\tilde F(f)\geqslant[\Omega^X](g,g)*\tilde F(g)=1*\tilde F(g)=\tilde F(g)$，所以$(\oplus3)$成立。

(2)⇒(1)。任取 $f,g\in\Omega^X$ 且 $f\leqslant g$，则$[\Omega^X](f,g)=1$，所以由$(\oplus3)$得

$$\tilde F(f)=1*\tilde F(f)=[\Omega^X](f,g)*\tilde F(f)\leqslant\tilde F(g)。$$

任取 $f\in\Omega^X,a\in\Omega$，令 $g=a*f$。由$(\oplus3)$得

$$a*\tilde F(f)=(1\to a)*\tilde F(f)\leqslant(\bigwedge_{x\in X}1*f(x)\to a*f(x))*\tilde F(f)\leqslant$$

$$\bigvee_{h\in\Omega^X}[\Omega^X](h,a*f)*\widetilde{F}(h)=\widetilde{F}(a*f)。$$

所以，对任意有限模糊集 $G:\Omega^X\to\Omega$，任取 $\mu\in\Omega^X$，有

$$G(\mu)*\widetilde{F}(\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\lambda)\leqslant\widetilde{F}(G(\mu)*\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\lambda)\leqslant\widetilde{F}(\mu),$$

由 μ 的任意性得：

$$\widetilde{F}(\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\lambda)\leqslant\bigwedge_{\mu\in\Omega^X}G(\mu)\to\widetilde{F}(\mu)=\bigwedge_{\lambda\in\Omega^X}G(\lambda)\to\widetilde{F}(\lambda)=[\Omega^{\Omega^X}](G,\widetilde{F})。$$

因此，($\otimes=$)式的左边小于等于右边，而右边小于等于左边则由($\oplus$2)得到。

综上所述，有($\otimes$)式成立。

推论 2.1　$\widetilde{F}:\Omega^X\to\Omega$ 为集合 X 上的 Ω-滤子当且仅当 $\widetilde{F}$ 满足($\oplus$1)和($\otimes$)。

注 2.2　因为完备剩余格(Ω, $*$, 1)可以看作多值逻辑的真值表[2]，所以 Ω-滤子也称为多值滤子。

参考文献：

[1] 李令强，金秋. 多值滤子及其应用[J]. 山东大学学报:理学版,2007, 42(12):29-32.

[2] ZHANG D. An enriched category approach to many valued topology[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007(158):349-366.

[3] HOHLE U, SOSTAK A. Mathematics of fuzzy sets, logic, topology and measure theory[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[4] HOHLE U. Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[5] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. Continuous lattices and domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

（编辑：陈丽萍）