文章编号:1671-9352(2008)08-0011-03

超图嵌入带权重圈的一个 2-近似算法

杨朝霞
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:超图嵌入带权圈(HEWC)问题就是把超图的超边以路的形式嵌入一个带权圈, 使得圈上任何带权连接边的最大阻塞最小。这个问题的一个简单形式是图嵌入带权圈(GEWC),即把普通图的边以路的形式嵌入 一个带权圈。HEWC 问题第一次被归结为一个整数线性规划问题,并且利用 LP 的放松问题和有界启发得到一个近似解。然后设计了一个非常简单有用的可以和 LP 近似算法得到一样好的近似解的线性时间近似算法。

关键词:最小阻塞;超图嵌入;带权圈;近似算法
中图分类号:O157 **文献标志码:** A

A 2-approximation algorithm for an embedded hypergraph in a weighted cycle

YANG Zhao-xia
(Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The problem of hypergraph embedding in a weighted cycle (HEWC) is to embed the hyperedges of a hypergraph as the paths in a weighted cycle, such that the maximum congestion of any weighted link in the cycle is minimized. A simple version of this problem is graph embedding in a weighted cycle(GEWC) that embeds the edges of a normal graph as the paths in a weighted cycle. The HEWC problem was formulated as an integer linear program, and an approximation solution was obtained by using LP-relation and rounding heuristic. Then, a linear time approximation algorithm was developed, which also provided a solution with the same worst case approximation bounds as LP-approximation.

Key words: minimum congestion; hypergraph embedding; weighted cycle; approximation algorithm

0 引言

最小阻塞超图嵌入圈(MCHEC)问题由 Ganley 和 Cohoon 提出[1]。在 MCHEC 问题中,我们希望把有 n 个顶点的超图的 m 条超边以路的形式嵌入一个有 n 个顶点的圈,使得圈上的边被路通过的最大数最小。注意超图的顶点集和圈的顶点集是一样的。

在对 MCHEC 这一问题的研究上, Ganley 和 Cohoon[1] 已经证明这一问题是 NP 难的,并且给出了一个 3-近似算法。在[2]中用不同的方法给出了近似比为 2 的近似算法。Gu 和 Wang[3] 用一个重新嵌入的方法给出了一个 1.8 倍的近似算法。最近,Deng 和 Li[4] 证明了 MCHEC 问题存在一个多项式时间近似算法(PTAS)。

超图嵌入带权圈问题(HEWC)是一个更有挑战性的问题,它在很多方面有很重要的应用,例如计算机网络,通信,平行计算,自动化电子设计等。它的目的是最小化最大阻塞,其中圈上每条边的阻塞是这条边的权重 和通过它的路的数目的乘积。

本文正式给出 HEWC 和 GEWC 问题的定义。以下记号在整篇文章中都要用到。首先,含有 n 个顶点的带权圈定义为 $C=(V,E_c)$,其中 $V=\{1,2,\cdots,n\}$代表顶点集,$E_c=\{(i,i+1)\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{(n,1)\}$ 代表

收稿日期:2008-05-07
作者简介:杨朝霞(1983-),女,博士研究生,主要研究方向为图论与组合优化,近似算法.Email:zhaoxia.yang@163.com

无向带权连接边集合。为了方便起见,用 e_i 代表连接边$(i,i+1)$。每条边 e_i 都有一个权重 w_i, 代表一条路通过它时的费用。把圈上的边看作无向连接边,顶点在圈上按顺时针方向从 1 到 n 标号。第二,一个有 m 条超边的 定义在相同顶点集 V 上的超图 $H=(V,E_h)$,其中 $E_h=\{h_1,\cdots,h_m\}$代表超边的集合。超边 h_i 含有 $|h_i|$个顶点。特别的,超边 h_i 的这些相互连接的点用一个有序列$(v_1^i,\cdots,v_{|h_i|}^i)$来表示, $v_1^i\leqslant v_2^i\leqslant\cdots\leqslant v_{|h_i|}^i$。最后,把超边 h_i 的第j 条连接路定义为p_j^i,其中 p_j^i 在圈上按顺时针方向连接v_j^i 和v_{j+1}^i,超边 h_i 最后的连接路 $p_{|h_i|}^i$ 连接 $v_{|h_i|}^i$ 和 v_1^i。把超图 H 嵌入圈 C 的一个连接路方案定义为一个二元变量 $Y=[y_{p_j^i}]$,若 p_j^i被嵌入圈 C 中, 则 $y_{p_j^i}=1$,否则,$y_{p_j^i}=0$。显然,超边 h_i 的所有顶点$(v_1^i,\cdots,v_{|h_i|}^i)$能相互连接需要最少有$|h_i|-1$条它的连接路被嵌入。因此,连接路的一个可行方案可以表示为

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant|h_i|}y_{p_j^i}\geqslant|h_i|-1,\ \forall h_i\in E_h。$$

更进一步,定义 $P(e)$为通过连接边 $e\in E_c$ 的连接路的集合。

显然,当$\forall w_i=1$ 时,HEWC 问题就是 MCHEC 问题。MCHEC 问题已经被证明是 NP 难的, 所以 HEWC 问题也是 NP 难的。现在,正式定义 HEWC 和 GEWC 问题如下:

定义 1　超图嵌入带权圈的最小化最大阻塞问题(HEWC)　给定一个带权圈 $C=(V,E_c)$和一个超图 $H=(V,E_h)$。问题:

找到一个把超图 H 嵌入圈 C 中连接路的可行方案 $Y=[y_{p_j^i}]$使得 E_c 中的连接边的最大阻塞$\Phi(Y)$最小。注意到一个方案 Y 的最大连接阻塞可以表示为

$$\Phi(Y)=\max_{e_i\in E_c}\{w_i\sum_{p_j^i\in P(e_i)}y_{p_j^i}\},$$

其中,若 p_j^i 被嵌入圈 C 中,则 $y_{p_j^i}=1$,否则,$y_{p_j^i}=0$。

定义 2　图嵌入带权圈的最小化最大阻塞问题(GEWC)　给定一个带权圈 $C=(V,E_c)$和一个图 $H=(V,E_h)$,其中 E_h 的每条边只含两个顶点,即$|h_i|=2,\ \forall h_i\in E_h$。问题:

找到一个把图 H 嵌入圈 C 中连接路的可行方案 $Y=[y_{p_j^i}]$使得 E_c 中的连接边的最大阻塞$\Phi(Y)$最小。注意到一个方案 Y 的最大连接阻塞可以表示为

$$\Phi(Y)=\max_{e_i\in E_c}\{w_i\sum_{p_j^i\in P(e_i)}y_{p_j^i}\},$$

其中,若 p_j^i 被嵌入圈 C 中,则 $y_{p_j^i}=1$,否则,$y_{p_j^i}=0$。

1　以 LP 为基础的近似

这一节给出一个整数线性规划模型(ILP)来解 HEWC 问题。把超图 H 嵌入圈 C 的一个连接路方案能够通过一个二元变量集合 $Y=[y_{p_j^i}]$来表示,其中,若 p_j^i 被嵌入圈 C 中,则 $y_{p_j^i}=1$, 否则,$y_{p_j^i}=0$。我们的目标函数是在 E_c 的每条连接边上最小化最大阻塞 $\Phi(Y)$。扩展[5]中的方法,HEWC 问题的 ILP 规划可以如下表示:

(NILP*) Minimize Φ 使得

连通性约束

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant|h_i|}y_{p_j^i}\geqslant|h_i|-1,\ \forall h_i\in E_h,\ i\in\{1,2,\cdots,m\},$$

容量约束

$$w_i\sum_{p_j^i\in P(e)}y_{p_j^i}\leqslant\Phi,\ \forall e\in E_c,$$

二元变量

$$0\leqslant y_{p_j^i}\leqslant 1,y_{p_j^i}\in Z,\forall i\in\{1,2,\cdots,m\},j\in\{1,2,\cdots,|h_i|\}。$$

类似[5]中的方法,得到下面的算法。

算法 1　以 NILP* 为基础的 rounding 算法。

Step 1　解出 NILP * 规划的 LP 放松问题的最优解。记最优解为 $\Phi(Y^L)$,其中,$Y^L = [y_{p_j^i}^{L_i}]$, $0 \leqslant y_{p_j^i}^{L_i} \leqslant 1$。

Step 2　若 $y_{p_j^i}^{L_i} \geqslant 1/2$,则令 $y_{p_j^i}^{R} = 1$,否则,$y_{p_j^i}^{R} = 0$。

Step 3　输出最大阻塞的近似解 $\Phi(Y^R)$,其中,$Y^R = [y_{p_j^i}^{R}]$。

用[5]中的方法,可以证明下面的定理。

定理 1　以 NILP * 为基础的 rounding 算法给出的最大阻塞,最多是 MCHEC, GEWC 和 HEWC 问题最优解的两倍。

证明　显然,当任给 $w_i = 1$ 时,HEWC 问题就是 MCHEC 问题,当任给 $|h_i| = 2$ 时,HEWC 问题就是 GEWC 问题。因此,只需要证明以 NILP * 为基础的 rounding 算法给出的最大阻塞最多是 HEWC 问题最优解的两倍。首先,证明 $\Phi(Y^R)$是 HEWC 问题的可行解。根据连通性约束,即,$\sum_{1 \leqslant j \leqslant |h_i|} y_{p_j^i} \geqslant |h_i| - 1$, 任何 LP 放松问题必须满足至少 $|h_i| - 1$ 个 $y_{p_j^i}^{L_i}$ 的值至少是 1/2。那么,对 i 的每个值, $\sum_{1 \leqslant j \leqslant |h_i|} y_{p_j^i}^{R}$ 的值至少是 $|h_i| - 1$。每个超边 h_i 是连通的,因此,解 $\Phi(Y^R)$是可行的。下面证明 $\Phi(Y^R) \leqslant 2\Phi(Y^*)$。从容量约束,有 $w_i \sum_{p_j^i \in P(e)} y_{p_j^i}^{L_i} \leqslant \Phi(Y^L)$。因为 $y_{p_j^i}^{L_i}$ 被界到 $y_{p_j^i}^{R}$,并且连通性约束保证至少 $|h_i| - 1$ 个 $y_{p_j^i}^{L_i}$ 的值至少是 1/2。有 $y_{p_j^i}^{R} = \lceil y_{p_j^i}^{L_i} \rceil \leqslant 2 y_{p_j^i}^{L_i}$。因此, $w_i \sum_{p_j^i \in P(e)} y_{p_j^i}^{R} \leqslant 2 w_i \sum_{p_j^i \in P(e)} y_{p_j^i}^{L_i}$, $\forall e \in E_c$。更进一步,得到 $\Phi(Y^R) \leqslant 2\Phi(Y^L) \leqslant 2\Phi(Y^*)$。证完。

2　以启发式为基础的近似

这一节给出一个可以找到小于等于两倍最优解的线性时间近似算法。仍然称超边 h_i 的一个可行嵌入在圈中至少包含 $|h_i| - 1$ 条它的连接路。因为删除一条连接路不影响可行性,我们的方法就是只移除圈的权重最大的一条连接边。例如,设圈上权重最大的连接边为 e_k, $1 \leqslant k \leqslant n$,即 $w_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{w_i\}$。虽然最大权重连接边移除算法简洁明了,我们证明这个近似算法 得到的解不会超过最优解的两倍。

定理 2　最大权重连接边移除算法给出的最大阻塞,最多是 MCHEC, GEWC 和 HEWC 问题的最优解的两倍。

证明　令 $\Phi(Y^*)$为最优解,$\Phi(Y')$为最大权重连接边移除算法得到的解。显然对任何圈上的连接边 e_i,

$$\Phi(Y') \geqslant w_i \sum_{p_j^i \in P(e_i)} y'_{p_j^i}, \quad \Phi(Y^*) \geqslant w_i \sum_{p_j^i \in P(e_i)} y_{p_j^i}^{*},$$

$\Phi(Y')$是可行的,因为每条超边 h_i 正好有 $|h_i| - 1$ 条连接路。假设在连接边 $e_1 = (1,2)$上得到最大权重连接边移除算法的最大阻塞,即,$\Phi(Y') = w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y'_{p_j^i}$。注意如果一条连接路 p_j^i 在最大权重连接边移除算法中被嵌入圈中,则 $y'_{p_j^i} = 1$。显然,

$$\Phi(Y^*) \geqslant w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y_{p_j^i}^{*} \geqslant w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y'_{p_j^i} y_{p_j^i}^{*},$$

其中,若 p_j^i 在最优嵌入和最大权重连接边移除算法中都通过连接边 e_1, $y'_{p_j^i} y_{p_j^i}^{*} = 1$。相对地,若 p_j^i 只在最大权重连接边移除算法中通过连接边 e_1,则 $y'_{p_j^i}(1 - y_{p_j^i}^{*}) = 1$。因为移除了圈上最重的连接边,则最优解中的其它连接路一定要通过这条最重的连接边,记这条最重边为 $e_k = (k, k+1)(k \neq 1)$。这表明

$$\Phi(Y^*) \geqslant w_k \sum_{p_j^i \in P(e_k)} y_{p_j^i}^{*} \geqslant w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y'_{p_j^i}(1 - y_{p_j^i}^{*}),$$

因此得到

$$\Phi(Y^*) \geqslant \max\left\{ w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y'_{p_j^i} y_{p_j^i}^{*},\ w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y'_{p_j^i}(1 - y_{p_j^i}^{*}) \right\} \geqslant$$

$$1/2 w_1 \sum_{p_j^i \in P(e_1)} y'_{p_j^i} = 1/2\Phi(Y')。$$

更进一步,一个简单的例子说明这个界限是紧的。考虑实例: $V = (1,2,\cdots,8)$,　(下转第 18 页)

(上接第 13 页) $h_1 = (1,4)$, $h_2 = (2,3)$, $w_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant 8$。最大权重连接边移除算法给出的阻塞数是 2,然而最优解阻塞数为 1。证完。

参考文献:

[1] GANLEY J L, COHOON J P. Minimum-congestion hypergraph embedding in a cycle[J]. IEEE Trans Computer, 1997, 46(5):600-602.

[2] GONZALEZ T. Improved approximation algorithm for embedding hyperedges in a cycle[J]. Inform Process Lett, 1998, 67:267-271.

[3] GU Q P, WANG Y. Efficient algorithm for embedding hypergraph in a cycle[M]// Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2003:85-94.

[4] DENG X, LI G. A PTAS for embedding hypergraph in a cycle[J]. ICALP, 2004:433-444.

[5] LEE S L, HO H J. Algorithms and complexity for weighted hypergraph embedding in a cycle[M]// Proc of the 1st International Symposium on Cyber World. Washington: IEEE Computer Society, 2002.

(编辑:李晓红)