第 43 卷　第 5 期　山 东 大 学 学 报（理 学 版）　2008 年 5 月
Vol.43　No.5　Journal of Shandong University(Natural Science)　May 2008

文章编号:1671-9352(2008)05-0063-03

LF 拓扑空间的 D_α-导集

孙守斌,孟广武

(聊城大学数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要: 在 L-fuzzy 拓扑空间中,利用 D_α-闭集定义了 D_α-导集,系统地讨论它的基本性质。

关键词: LF 拓扑学; D_α-闭集; D_α-导集; D_α-聚点

中图分类号: O159　　**文献标志码:** A

The D_α-derived set in LF topological space

SUN Shou-bin, MENG Guang-wu

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, China)

Abstract: In L-fuzzy topological space, the concept of D_α-derived set was defined based on D_α-closed sets. The characteristics of the concept were systematically discussed.

Key words: LF topology; D_α-closed set; D_α-derived set; D_α-cluster point

文献[1]在 LF 拓扑空间中研究了聚点的性质,文献[2]在 LF 保序算子空间中探讨了 ω-聚点的特性。在此基础上本文利用 D_α-闭集定义了 D_α-聚点,并讨论了它的性质,且和文献[1]中的聚点作了比较,得出:(1)这种 D_α-聚点保持了聚点特性;(2)若 e 是 A 的 D_α-聚点,则 e 是 A 的聚点,反之不成立。

文中未加说明而使用的概念和记号均见文献[1,2], 其中 $\alpha \in M(L)$。

1　预备知识

定义 1.1[3]　设 (L^X,δ) 是 L-fts, $\alpha \in M(L)$。算子 $D_\alpha: L^X \to \delta'$ 定义为:

$\forall A \in L^X, D_\alpha(A) = \wedge\{G \in \delta' \mid G_{[\alpha]} \supset A_{[\alpha]}\}$。其中 $G_{[\alpha]} = \{x \in X \mid G(x) \geqslant \alpha\}$。称 $A \in L^X$ 为 (L^X,δ) 中的 D_α-闭集,若 $(D_\alpha(A))_{[\alpha]} = A_{[\alpha]}$。$(L^X,\delta)$ 中的全体 D_α-闭集,记为 $D_\alpha(\delta)$。

定理 1.1[3]　设 (L^X,δ) 是 L-fts, $A \in L^X$,若 $A \in \delta'$ 则 $\forall \alpha \in M(L), A \in D_\alpha(\delta)$。即 $\delta' \subset D_\alpha(\delta)$。$D_\alpha(\delta)$ 形成 X 上的一个 LF 余拓扑。

定义 1.2　设 (L^X,δ) 是 L-fts, $A \in L^X, x \in X$,则

(1) 称 $P \in D_\alpha(\delta)$ 为 x_α 的 α-远域,若 $x_\alpha \notin P$。x_α 的全体 α-远域,记作 $\eta_\alpha(x_\alpha)$[3];

(2) 称 e 为 A 的 D_α-附着点,若 $\forall P \in \eta_\alpha(e)$ 有 $A_{[\alpha]} \not\subset P_{[\alpha]}$。

定理 1.2　设 (L^X,δ) 是 L-fts, $A \in L^X, \alpha \in M(L)$,则

(1) $\forall e \in M^*(L^X), e \in D_\alpha(A)$ 当且仅当 e 是 A 的 D_α-附着点;

(2) $D_\alpha(A) = \vee\{e \in M^*(L^X) \mid e$ 是 A 的 D_α-附着点$\}$。

收稿日期: 2007-11-20

基金项目: 山东省自然科学基金资助项目(Y2003A01)

作者简介: 孙守斌(1972-　),男,硕士研究生,副教授,研究方向为格上拓朴学. Email: lessb@126.com

证明 (1) 设 $e \notin D_\alpha(A)$,则 $D_\alpha(A) \in \eta_\alpha(e)$。由$A_{[\alpha]} \subset (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$知 e 不是 A 的 D_α-附着点。反过来,设 e 不是 A 的 D_α-附着点,则有 $P \in \eta_\alpha(e)$使$A_{[\alpha]} \subset P_{[\alpha]}$。由于 P 是 D_α-闭集,所以$(D_\alpha(A))_{[\alpha]} \subset P_{[\alpha]}$,故 $D_\alpha(A) < P$。由 $e \notin P$ 知 $e \notin D_\alpha(A)$。

(2) 由文献[1]定理 1.5.29 及(1)立得。

推论 1.1 设(L^X, δ)是 L-fts,$A \in L^X$,$e \in M^*(L^X)$,$\alpha \in M(L)$,若 e 是A 的D_α-附着点,则 e 是A 的附着点。

以上推论反之不成立,见例 1.1。

例 1.1 取 $X = L = [0,1]$, 令 H_k 表示直线段 $y = kx$, 这里 $x \in X$。置 $\delta' = \{H_k \mid k \in [0,1]\} \cup \{1\}$,则$(L^X, \delta)$是 L-fts。定义 $A \in L^X$ 为

$A(x) = \begin{cases} 0.25, x \in [0,0.5) \\ 0.5, x \in [0.5,1] \end{cases}$,取 $\alpha = 0.5$,则 $A_{[\alpha]} = [0.5,1]$,$A^- = 1$,$D_\alpha(A) = H_1$[3],取 $e = 0.3$,则 $e \leqslant A^-$但 $e \notin D_\alpha(A)$。

2 D_α-导集

定义 2.1 设(L^X, δ)是 L-fts,$A \in L^X$,$e \in M^*(L^X)$。e 叫做A 的D_α-聚点,若

(1) e 是A 的D_α-附着点,即 $e \in D_\alpha(A)$,且 $e \notin A_{[\alpha]}$;

(2) 或 $e \in A_{[\alpha]}$且$\forall P \in \eta_\alpha(e)$以及对 $A_{[\alpha]}$中每个包含 e 的分子d,有$A_{[\alpha]} \not\subset P_{[\alpha]} \cup d$。

由推论 1.1 及定义 2.1 得

推论 2.1 若 e 是A 的D_α-聚点,则 e 是A 的聚点。

由例 1.1 知,此推论反之不成立。

定义 2.2 设(L^X, δ)是 L-fts,$A \in L^X$。A 的一切D_α-聚点之并叫做A 的D_α-导集,记作 $A^d_{D_\alpha}$。

定理 2.1 设(L^X, δ)是 L-fts,$A \in L^X$。则

$$(D_\alpha(A))_{[\alpha]} = A_{[\alpha]} \cup (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}。$$

证明 由于 $A^d_{D_\alpha}$是A 的D_α-聚点之并,而 D_α-聚点是D_α-附着点,故由定理 1.2 知$(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]} \subset (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$。而$A_{[\alpha]} \subset (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$,所以$(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]} \cup A_{[\alpha]} \subset (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$。

反之,设分子 $e \in (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$,若$e \in A_{[\alpha]}$,则显然$(D_\alpha(A))_{[\alpha]} \subset (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]} \cup A_{[\alpha]}$;若$e \notin A_{[\alpha]}$,则 e 是 A 的 D_α-聚点,因此 $e \in (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$,从而又有$(D_\alpha(A))_{[\alpha]} \subset (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]} \cup A_{[\alpha]}$。于是结论成立。

定理 2.2 (杨忠道定理) 设(X, δ)是 F 拓扑空间。如果每个 F 点x_λ 的D_α-导集是D_α-闭集,则每个 F 集A 的D_α-导集是D_α-闭集。

证明 由于 $L = [0,1]$,故 F 点 x_λ 都是分子。以下只需证明$(D_\alpha(A^d_{D_\alpha}))_{[\alpha]} \subset (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。设 $x_\lambda \in (D_\alpha(A^d_{D_\alpha}))_{[\alpha]}$,证明 $x_\lambda \in (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。

事实上,若 $x_\lambda \in (D_\alpha(A^d_{D_\alpha}))_{[\alpha]}$,由于$(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]} \subset (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$,故 $x_\lambda \in (D_\alpha(A))_{[\alpha]}$。如果$x_\lambda \notin A_{[\alpha]}$,则 $x_\lambda \in (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。于是可设 $x_\lambda \in A_{[\alpha]}$,显然 $A(x) \geqslant \lambda$,因此,可令 $\mu = A(x)$。由定义 2.1 得,当 $\lambda \leqslant \mu$ 时 x_λ 不是 x_μ 的 D_α-聚点,即$x_\lambda \notin (x_\mu)^d_{D_\alpha}$。由定理的条件知$(x_\mu)^d_{D_\alpha}$是 D_α-闭集,从而$(x_\mu)^d_{D_\alpha} \in \eta_\alpha(x_\lambda)$。设 $P \in \eta_\alpha(x_\lambda)$,$P_1 = P \vee (x_\mu)^d_{D_\alpha}$,于是 $P_1 \in \eta_\alpha(x_\lambda)$。由 $x_\lambda \in (D_\alpha(A^d_{D_\alpha}))_{[\alpha]}$得$(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]} \not\subset (P_1)_{[\alpha]}$。故 A 有 D_α-聚点 e 使 $e \notin P_1$,则 $P_1 \in \eta_\alpha(e)$。若$e \notin (D_\alpha(x_\mu))_{[\alpha]}$,则 $P_1 \vee D_\alpha(x_\mu) \in \eta_\alpha(e)$,故$A_{[\alpha]} \not\subset (P_1)_{[\alpha]} \cup (D_\alpha(x_\mu))_{[\alpha]}$。若 $e \in (D_\alpha(x_\mu))_{[\alpha]}$,则因 $e \notin P_1 = P \vee (x_\mu)^d_{D_\alpha}$有 $e \notin (x_\mu)^d_{D_\alpha}$,所以 $e \leqslant x_\mu$。由于 e 是 A 的 D_α-聚点,$e \leqslant x_\mu \in A_{[\alpha]}$,所以$A_{[\alpha]} \not\subset (P_1)_{[\alpha]} \cup x_\mu$。因此$A_{[\alpha]} \not\subset P_{[\alpha]} \cup x_\mu$,故 x_λ 是 A 的 D_α-聚点,从而 $x_\lambda \in (A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。命题得证。

定义 2.3　设(L^X,δ)是 L-fts,若$\forall e,d\in M^*(L^X)$,当 $e<d$ 时,存在 $P\in\eta_\alpha(d)$,使$e_{[\alpha]}\subset P_{[\alpha]}$,则称$(L^X,\delta)$是 D_α-T_{-1}的。

定理 2.3　设(L^X,δ)是 $D_\alpha-T_{-1}$空间,当且仅当$\forall e\in M^*(L^X)$,不存在 $d\in M^*(L^X)$使得$e_{[\alpha]}\subset d_{[\alpha]}\subset(D_\alpha(e))_{[\alpha]}$。

证明　$\forall e,d\in M^*(L^X)$且 $e<d$,则 $d\not\leqslant D_\alpha(e)$,故 $D_\alpha(e)\in\eta_\alpha(d)$,又$e_{[\alpha]}\subset(D_\alpha(e))_{[\alpha]}$,所以$(L^X,\delta)$是 $D_\alpha-T_{-1}$的。

反之,$\forall e\in M^*(L^X)$,若有 $d\in M^*(L^X)$使得$e_{[\alpha]}\subset d_{[\alpha]}\subset(D_\alpha(e))_{[\alpha]}$,由于$(L^X,\delta)$是 $D_\alpha-T_{-1}$,故有$P\in\eta_\alpha(d)$使$e_{[\alpha]}\subset P_{[\alpha]}$,由于 P 是 D_α-闭集,从而$(D_\alpha(e))_{[\alpha]}\subset P_{[\alpha]}$,于是$d_{[\alpha]}\subset P_{[\alpha]}$,这就产生了矛盾。

定理 2.4　设(I^X,δ)是 $D_\alpha-T_{-1}$空间,$d_{D_\alpha}:I^X\to I^X$ 是 D_α-导算子($I=[0,1]$),则$\forall A,B\in I^X$,有$((A\vee B)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}=(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\cup(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。

证明　首先证明 d_{D_α}是单调算子,即若 $A\leqslant B$,则$(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\leqslant(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。为此,设 $x_\lambda\in(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$,以下证明 $x_\lambda\in(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。若$x_\lambda\notin B_{[\alpha]}$,则由 $x_\lambda\in(D_\alpha(A))_{[\alpha]}\subset(D_\alpha(B))_{[\alpha]}$及定理 2.1 知 $x_\lambda\in(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$,故可设 $x_\lambda\in B_{[\alpha]}$。令 $A(x)=\mu,B(x)=\xi$。若 $x_\lambda\in A_{[\alpha]}$,则 $\lambda\leqslant\mu$,于是$\forall P\in\eta_\alpha(x_\lambda)$,$A_{[\alpha]}\not\subset P_{[\alpha]}\cup x_\mu$。又显然 $A(x)\leqslant P(x)\vee\mu$,所以有 $y\in X,y\neq x$,使 $A(y)\not\leqslant P(y)$,这时 $B(y)\not\leqslant P(y)$,从而$B_{[\alpha]}\not\subset P_{[\alpha]}\cup x_\xi$,所以 $x_\lambda\in(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。若$x_\lambda\notin A_{[\alpha]}$,则 $x_\lambda\not\leqslant x_\mu$,即 $\mu<\lambda$。由于(I^X,δ)是 $D_\alpha-T_{-1}$空间,由定理 2.3 知$x_\lambda\notin(D_\alpha(x_\mu))_{[\alpha]}$,因此$\forall P\in\eta_\alpha(x_\lambda)$,$P\vee D_\alpha(x_\mu)\in\eta_\alpha(x_\lambda)$。又因为 x_λ 是A 的 D_α-聚点,故$A_{[\alpha]}\not\subset P_{[\alpha]}\cup(D_\alpha(x_\lambda))_{[\alpha]}$,从而存在 $y\in X,y\neq x$,使 $A(y)\not\leqslant P(y)$,于是 $B(y)\not\leqslant P(y)$。可见$B_{[\alpha]}\not\subset P_{[\alpha]}\cup x_\xi$,故 $x_\lambda\in(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。

由以上的证明知$((A\vee B)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\supset(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\cup(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$是显然的,故只需证

$$((A\vee B)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\subset(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\cup(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}。$$

事实上,设 $x_\lambda\in((A\vee B)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$,如果$x_\lambda\notin(A\vee B)_{[\alpha]}$,则$x_\lambda\notin A_{[\alpha]}$且$x_\lambda\notin B_{[\alpha]}$。又由 $x_\lambda\in((A\vee B)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\subset(D_\alpha(A\vee B))_{[\alpha]}=(D_\alpha(A))_{[\alpha]}\cup(D_\alpha(B))_{[\alpha]}$知,$x_\lambda\in(D_\alpha(A))_{[\alpha]}$或 $x_\lambda\in(D_\alpha(B))_{[\alpha]}$,于是由定理 2.1 知 $x_\lambda\in(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$或 $x_\lambda\in(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$,即 $x_\lambda\in(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\cup(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$;如果 $x_\lambda\in(A\vee B)_{[\alpha]}$,令 $A(x)=\mu,B(x)=\xi$,不妨设 $\mu\leqslant\xi$。若有 $P\in\eta_\alpha(x_\lambda)$使$A_{[\alpha]}\subset P_{[\alpha]}\cup x_\mu$,则$\forall Q\in\eta_\alpha(x_\lambda)$,由$(A\vee B)_{[\alpha]}\not\subset(P\vee Q)_{[\alpha]}\cup x_\xi$ 知$B_{[\alpha]}\not\subset Q_{[\alpha]}\cup x_\xi$,故 x_λ 是 B 的 D_α-聚点,即 $x_\lambda\in(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。若$\forall P\in\eta_\alpha(x_\lambda)$,都有 $A_{[\alpha]}\not\subset P_{[\alpha]}\cup x_\mu$,则得 $x_\lambda\in(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$。于是$((A\vee B)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\subset(A^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\cup(B^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}$,这就证明了此定理。

定义 2.4　设(L^X,δ)是 L-fts,若$\forall e,d\in M^*(L^X)$,当 $e\not\leqslant d$ 时,存在 $P\in\eta_\alpha(e)$,使$d_{[\alpha]}\subset P_{[\alpha]}$,则称$(L^X,\delta)$是 D_α-T_1 的。

定理 2.5　设 F 拓扑空间(X,δ)是 D_α-T_1 空间,则 X 上任一 F 集A 的 D_α-导集$A^d_{D_\alpha}$都是D_α-闭集。

证明　由定理 2.2 知,只需证明$\forall x_\lambda\in I^X$,$(I=[0,1])$,$(x_\lambda)^d_{D_\alpha}$是D_α-闭集。事实上,若 x_λ 有 D_α-聚点 y_μ,则$(y_\mu)_{[\alpha]}\subset((x_\lambda)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}\subset(D_\alpha(x_\lambda))_{[\alpha]}=(x_\lambda)_{[\alpha]}$,故 $y=x,\mu\leqslant\lambda$。设 $Q\in\eta_\alpha(y_\mu)$,则由 D_α-聚点的定义知$(x_\lambda)_{[\alpha]}\not\subset Q_{[\alpha]}\cup(x_\lambda)_{[\alpha]}$。这显然是不可能的,因此,$x_\lambda$ 没有任何 D_α-聚点,即$((x_\lambda)^d_{D_\alpha})_{[\alpha]}=\emptyset$,所以$(x_\lambda)^d_{D_\alpha}$是 D_α-闭集。

参考文献:

[1] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1988.
[2] 黄朝霞. LF 保序算子空间的 ω-导集[J]. 模糊系统与数学,2007,21(2):26-29.
[3] 孟广武,孟晗. D_α-闭集及其应用[J]. 模糊系统与数学,2003,17(1):24-27.

(编辑:陈丽萍)