第43卷 第8期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008年8月
Vol.43 No.8 Journal of Shandong University(Natural Science) Aug. 2008

文章编号:1671-9352(2008)08-0006-05

对流占优扩散方程的最小二乘特征混合有限元方法

郭会
(中国石油大学(华东)数学与计算科学学院, 山东 东营 257061)

摘要: 将最小二乘混合有限元法与特征有限元法 有效地结合起来处理对流占优扩散方程。通过适当选取最小二乘能量泛函, 数值方法可以分裂成2个独立的子格式, 并且数值方法可以同时逼近解及其梯度, 选取较大的时间步长。收敛性分析表明在一定范数意义下, 这种方法具有最优收敛阶。

关键词: 最小二乘混合有限元;特征;对流占优扩散方程;收敛性分析
中图分类号: O241.26 **文献标志码:** A

A least-squares mixed finite element procedure with the method of characteristics for convection-dominated diffusion equations

GUO Hui
(School of Mathematics and Computational Science, China University of Petroleum, Dongying 257061, Shandong, China)

Abstract: A least-squares mixed finite element procedure with the method of characteristics for convection-dominated diffusion equations was presented. By properly selecting the least-squares functional, the procedure can be split into two independent sub-procedures. The solution u and the flux σ can be directly obtained. Moreover the method permits the use of large steps. The optimal convergence analysis was established.

Key words: least-squares mixed finite element; characteristics; convection-dominated diffusion equations; convergence analysis

0 引言

本文考虑如下对流占优扩散方程

$$\begin{cases} c(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{d}(x)\cdot\nabla u - \nabla\cdot(\boldsymbol{A}(x)\nabla u(x,t)) = f(x,t), & (x,t)\in(\Omega\times J), \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in(\Gamma\times J), \\ u(x,0)=u_0(x)。 & (x\in\Omega) \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $J=(0,T)$,Ω 为 R^2 的有界多边形区域,边界 Γ 满足 Lipschitz 连续。$f=f(x,t)$ 是已知函数。$\boldsymbol{d}(x)=(d_1(x),d_2(x))^{\mathrm{T}}$。假设 $\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))_{2\times 2}$ 是对称一致正定矩阵,即存在正常数 a_*,a^* 使得 $a_*\|\xi\|^2\leqslant(\boldsymbol{A}\xi,\xi)\leqslant a^*\|\xi\|^2$,$\forall\xi\in R^2$。假设存在正常数 k_1,k_2 满足: $0<k_1\leqslant c(x)\leqslant k_2$,$\|\boldsymbol{d}\|_{W^{\infty,1}}+\|c\|_{W^{\infty,1}}\leqslant k_2$。

在处理核废料污染问题、渗流驱动问题、海水入侵问题及半导体问题等数值模拟中,均涉及到对流扩散方程(方程组)的求解问题。对于对流扩散问题,文献[1]用标准混合元方法对此类问题进行了很好的讨论和研究。文献[2]用最小二乘混合元方法处理此类问题。问题(0.1)具有对流占优性的特点,对流占优性给问

收稿日期: 2008-05-22
基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金资助项目(10726032)
作者简介: 郭会(1979-),女,讲师,博士,从事偏微分方程数值解研究. Email: sdugh@163.com

题的数值求解带来许多困难。特征有限元法是对此类问题行之有效的方法,参看文献[3]。

近来,芮[4]提出了一种改进的最小二乘混合有限元方法。这种方法仍然保持了最小二乘法的优越性:数值方法不需要验证 LBB 一致性条件,并且离散形式是对称正定的。除此之外这种算法的优点是通过适当选取最小二乘能量泛函,使得格式可以分裂成2个独立的子格式,从而可以更灵活地选择有限元空间。本文应用这种方法,并且沿着特征方向离散方程的对流项,来处理对流占优扩散方程,从而构造了一种新型数值方法。

如同文献[5]使用索波列夫空间通常的定义和记号。假设问题(0.1)关于 Ω 是周期性的。文中,K,δ 分别表示正常数和任意小的正常数。在第 1 章提出问题(0.1)的逼近方法,在第 2 章中对算法进行收敛性分析。

1 最小二乘特征混合有限元方法

如下定义内积和空间

$$H=\{w\in L^2(\Omega)^2;\ \mathrm{div}\ w\in L^2(\Omega)\},$$
$$S=\{v\in H^1(\Omega),\ v=0 \text{ on } \Gamma\}。$$

引进新的变量 $\sigma=-(\boldsymbol{A}(x)\nabla u(x,t))$,则方程(0.1)等价于求解下列问题

$$\begin{cases} c(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\boldsymbol{d}(x)\cdot\nabla u+\mathrm{div}\sigma(x,t)=f(x,t), & (x\in\Omega,\quad 0<t\leqslant T)\\ \sigma(x,t)+\boldsymbol{A}(x)\nabla u(x,t)=0, & (x\in\Omega,\quad 0<t\leqslant T)\\ u(x,t)=0, & (x\in\Gamma,\quad 0<t\leqslant T)\\ u(x,0)=u_0(x)。 & (x\in\Omega)\end{cases}\tag{1.1}$$

令 $\psi(x)=\sqrt{c(x)^2+|\boldsymbol{d}(x)|^2}$,$\dfrac{\partial}{\partial s}$表示沿$(c(x),\boldsymbol{d}(x))$方向的方向导数,则:

$\psi\dfrac{\partial u}{\partial s}=c(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{d}(x)\cdot\nabla u$。则方程(1.1)可以变为下列形式:

$$\begin{cases} \psi\dfrac{\partial u}{\partial s}+\mathrm{div}\sigma(x,t)=f(x,t), & (x\in\Omega,0<t\leqslant T)\\ \sigma(x,t)+\boldsymbol{A}(x)\nabla u(x,t)=0, & (x\in\Omega,0<t\leqslant T)\\ u(x,t)=0, & (x\in\Gamma,0<t\leqslant T)\\ u(x,0)=u_0(x)。 & (x\in\Omega)\end{cases}\tag{1.2}$$

作时间剖分 $\Delta t=T/N$, N 为整数,本文将在时间 $t_n=n\Delta t$, $n=0,1,\cdots,N$ 处逼近解。令 $\bar{x}=x-\dfrac{\boldsymbol{d}(x)}{c(x)}\Delta t$,$\bar{\phi}^n=\phi^n(\bar{x})$,则 $\psi(x)\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)^n=c(x)\dfrac{u^n(x)-u^{n-1}(\bar{x})}{\Delta t}+e^n$。由文献[3]可知

$$e^n=O(\Delta t)。\tag{1.3}$$

方程(1.2) 变为离散形式:

$$\begin{cases} c(x)\dfrac{u^n-\bar{u}^{n-1}}{\Delta t}+\mathrm{div}\sigma^n(x)=f^n(x)+R_1^n, & (x\in\Omega)\\ \sigma^n+\boldsymbol{A}\nabla u^n=0, & (x\in\Omega)\\ u^n(x)=0, & (x\in\Gamma)\\ u^0(x)=u_0(x)。 & (x\in\Omega)\end{cases}\tag{1.4}$$

其中 $R_1^n=c(x)\left(\dfrac{u^n-\bar{u}^{n-1}}{\Delta t}-u_t^n\right)=O(\Delta t)$。

定义最小能量泛函

$$J_1^n(\tau,\omega)=\|c^{-\frac{1}{2}}[c\omega+\Delta t\mathrm{div}\tau-(cu^{n-1}+\Delta tf^n+\Delta tR_1^n)]\|^2+\Delta t\|\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}[\tau+\boldsymbol{A}\nabla\omega]\|^2。\tag{1.5}$$

则问题(1.4)等价于求解$(\sigma^n,u^n)\in H\times S$满足

$$J_1^n(\sigma^n,u^n)=\min_{\tau\in H,\omega\in S}J_1^n(\tau,\omega)。\tag{1.6}$$

定义双线性形式

$$a_n((\sigma,u),(\psi,v))=(c^{-1}(cu+\Delta t\operatorname{div}\sigma),cv+\Delta t\operatorname{div}\psi)+\Delta t(\boldsymbol{A}^{-1}(\sigma+\boldsymbol{A}\nabla u),\psi+\boldsymbol{A}\nabla v))。\tag{1.7}$$

则式(1.6)的弱形式为:求解$(\sigma^n,u^n)\in H\times S$ 满足

$$a_n((\sigma^n,u^n),(\psi,v))=(c^{-1}(c\bar{u}^{n-1}+\Delta tf^n+\Delta tR_1^n),cv+\Delta t\operatorname{div}\psi)。(\forall(\psi,v)\in H\times S)\tag{1.8}$$

本文基于式(1.8)建立数值方法。T_{h_σ}, T_{h_u} 是区域Ω 上的有限元剖分族, 网格参数分别为 h_σ, h_u。假设相应的有限元空间为$H_{h_\sigma}\subset H$, $S_{h_u}\subset S$ 有以下性质: 存在 $k\geqslant 0,l\geqslant 1$ 满足

$$\begin{cases}\inf\limits_{\omega_h\in H_{h_\sigma}}\|\omega-\omega_h\|\leqslant Kh_\sigma^{k+1}\|\omega\|_{k+1},\\ \inf\limits_{\omega_h\in H_{h_\sigma}}\|\operatorname{div}(\omega-\omega_h)\|\leqslant Kh_\sigma^{k_1}\|\omega\|_{k_1+1},\\ \inf\limits_{v_h\in S_{h_u}}\{\|v-v_h\|+h_u\|\nabla(v-v_h)\|\}\leqslant Kh_u^{l+1}\|v\|_{l+1}。\end{cases}\tag{1.9}$$

其中当 H_{h_σ} 为 Raviart-Thomas 混合元空间[6]或者 Nedelec 有限元空间[7]时,$k_1=k+1$。当 H_{h_σ} 为 C^0 有限元空间[8]时,$k_1=k$。

假定初始值满足:

$$\begin{cases}\|u_0-u_h^0\|_s\leqslant Kh_u^{l+1-s}\|u_0\|_{l+1},(s=0,1)\\ \|\sigma_0-\sigma_h^0\|\leqslant Kh_\sigma^{k+1}\|\sigma_0\|_{k+1}。\end{cases}\tag{1.10}$$

在式(1.8)中省略时间截断误差,本文定义最小二乘特征混合有限元方法。

方法 1　给定初始值 $u_h^0\in S_{h_u}$, 对于 $n=1,2\cdots N$, 求解$(\sigma_h^n,u_h^n)\in H_{h_\sigma}\times S_{h_u}$ 满足:

$$a_n((\sigma_h^n,u_h^n),(\psi_h,v_h))=(c^{-1}(c\bar{u}_h^{n-1}+\Delta tf^n),cv_h+\Delta t\operatorname{div}\psi_h)。(\forall(\psi_h,v_h)\in H_{h_\sigma}\times S_{h_u})\tag{1.11}$$

下面讨论双线性形式 a_n。

引理 1.1　对于任意$(\sigma,u),(\psi,v)\in H\times S$ 成立

$$a_n((\sigma,u),(\psi,v))=(cu,v)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla u,\nabla v)+\Delta t(\boldsymbol{A}^{-1}\sigma,\psi)+\Delta t^2(c^{-1}\operatorname{div}\sigma,\operatorname{div}\psi)。\tag{1.12}$$

证明　由 a_n 定义式(1.7)可得

$$\begin{aligned}a_n((\sigma,u),(\psi,v))=&(cu,v)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla u,\nabla v)+\Delta t(\boldsymbol{A}^{-1}\sigma,\psi)+\Delta t^2(c^{-1}\operatorname{div}\sigma,\operatorname{div}\psi)+\\&\Delta t[(u,\operatorname{div}\psi)+(\operatorname{div}\sigma,v)+(\sigma,\nabla v)+(\nabla u,\psi)]。\end{aligned}$$

利用格林公式可得式(1.12)。

注 1.1　在方法 1 中分别取 $\psi_h=0$, $v_h=0$,利用引理 1.1,可以得到方法 1 的等价形式

$$(cu_h^n,v_h)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla u_h^n,\nabla v_h)=(c\bar{u}_h^{n-1},v_h)+\Delta t(f^n,v_h)。(\forall v_h\in S_{h_u})\tag{1.13}$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\sigma_h^n,\psi_h)+\Delta t(c^{-1}\operatorname{div}\sigma_h^n,\operatorname{div}\psi_h)=(\bar{u}_h^{n-1},\operatorname{div}\psi_h)+\Delta t(c^{-1}f^n,\operatorname{div}\psi_h)。(\forall\psi_h\in H_{h_\sigma})\tag{1.14}$$

从上述结果看到方法 1 可以分裂成 2 个独立的子格式。其中第一个子格式是关于 u_h 的,第二个子格式是关于 σ_h 的。这样数值方法降低了问题的规模,可以更自由地选择有限元空间。同时,由引理 1.1 容易得出双线性形式 a_n 是对称一致正定的,则数值方法在每一时间层上具有惟一解。

2　收敛性分析

由文献[3]可以得到下面 2 个引理:

引理 2.1　若 $q\in L^\infty(L^2)$;则 $\|\bar{q}\|_c^2\leqslant(1+K\Delta t)\|q\|_c^2$,其中 $\|q\|_c^2=(cq,q)$常数 K 只与 k_1,k_2 有关。

引理 2.2　若 $\eta\in L^\infty(L^2)$,$\bar{\eta}(x)=\eta(x-g(x)\Delta t)$;其中 g,g'是有界的,则

$$\|\eta-\bar{\eta}\|_{-1}\leqslant K\|\eta\|\Delta t。$$

下面对数值方法进行收敛性分析。

定理 2.1　(σ,u) 是方程(1.1)的解, (σ_h^n,u_h^n) 是方法 1 的解,则成立先验误差估计

$$\|u^n-u_h^n\|_s\leqslant K(\Delta t+h_u^{l+1-s}),(s=0,1)\tag{2.1}$$

$$\|\sigma^n-\sigma_h^n\|+\Delta t\|\operatorname{div}(\sigma^n-\sigma_h^n)\|\leqslant K(\Delta t^{\frac{3}{2}}+h_u^l+h_\sigma^{k+1}+\Delta t^{\frac{1}{2}}h_\sigma^{k_1})。\tag{2.2}$$

其中 K 与 T 以及(σ,u)的范数有关,与网格参数 $h_u,h_\sigma,\Delta t$ 无关。

证明 由有限元空间性质知存在向量函数 $Q\sigma\in H_{h_\sigma}$ 满足

$$\begin{cases}\|\sigma-Q\sigma\|\leqslant Kh_\sigma^{k+1}\|\sigma\|_{k+1},\\ \|\operatorname{div}(\sigma-Q\sigma)\|\leqslant Kh_\sigma^{k_1}\|\sigma\|_{k_1+1}。\end{cases}\tag{2.3}$$

对于 $u\in H^1(\Omega)$, $u|_\Gamma=0$ 引进椭圆投影 $Ru\in S_{h_u}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}\nabla(Ru-u),\nabla v_h)+\lambda(Ru-u,v_h)=0,\ (\forall v_h\in S_{h_u})\tag{2.4}$$

其中 $\lambda>0$ 是正常数。由文献[9]知成立, $s=0,1$,

$$\begin{cases}\|u^n-Ru^n\|_s\leqslant Kh_u^{l+1-s}\|u\|_{L^\infty(H^{l+1}(\Omega))},\\ \|D_t(u^n-Ru^n)\|_s\leqslant Kh_u^{l+1-s}[\|u\|_{L^\infty(H^{l+1}(\Omega))}+\|u_t\|_{L^\infty(H^{l+1}(\Omega))}]。\end{cases}\tag{2.5}$$

其中 $D_tu^n=\dfrac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}$。

本文首先证明式(2.1)。在式(1.8)中取 $\psi=0$,利用引理 1.1 可得

$$(cu^n,v)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla u^n,\nabla v)=(c\bar{u}^{n-1},v)+\Delta t(f^n,v)+\Delta t(R_1^n,v)。\tag{2.6}$$

将式(2.6)与注 1.1 中式(1.13)相减可得

$$(c(u^n-u_h^n),v_h)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla(u^n-u_h^n),\nabla v_h)=(c(\bar{u}^{n-1}-\bar{u}_h^{n-1}),v_h)+\Delta t(R_1^n,v_h)。\tag{2.7}$$

令 $\theta^n=Ru^n-u_h^n,\rho^n=u^n-Ru^n,\pi^n=Q\sigma^n-\sigma_h^n,\varepsilon^n=\sigma^n-Q\sigma^n$。$\varepsilon^n$ 和 ρ^n 的估计式由式(2.3),式(2.5)给出,需要估计 θ^n 和 π^n。由式(2.7)可得 θ^n 满足估计式

$$(c(\theta^n-\bar{\theta}^{n-1}),v_h)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla\theta^n,\nabla v_h)=(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^n),v_h)+\lambda\Delta t(\rho^n,v_h)+\Delta t(R_1^n,v_h)。\tag{2.8}$$

其中用到等式 $\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla\rho^n,\nabla v_h)+\lambda\Delta t(\rho^n,v_h)=0$。

在式(2.8)中令 $v_h=\theta^n$ 可得

$$(c(\theta^n-\bar{\theta}^{n-1}),\theta^n)+\Delta t(\boldsymbol{A}\nabla\theta^n,\nabla\theta^n)=(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^n),\theta^n)+\lambda\Delta t(\rho^n,\theta^n)+\Delta t(R_1^n,\theta^n)。\tag{2.9}$$

本文对式(2.9)逐项进行估计。首先利用引理 2.1,以及 Cauchy's 不等式可得

$$\begin{aligned}(c(\theta^n-\bar{\theta}^{n-1}),\theta^n)&=\frac{1}{2}[(c\theta^n,\theta^n)-(c\bar{\theta}^{n-1},\bar{\theta}^{n-1})+(c(\theta^n-\bar{\theta}^{n-1}),\theta^n-\bar{\theta}^{n-1})]\geqslant\\ &\frac{1}{2}[\|c^{\frac12}\theta^n\|^2-\|c^{\frac12}\theta^{n-1}\|^2+\|c^{\frac12}(\theta^n-\bar{\theta}^{n-1})\|^2]-K\Delta t\|c^{\frac12}\theta^{n-1}\|^2。\end{aligned}\tag{2.10}$$

利用引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^n),\theta^n)&=(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^{n-1}),\theta^n)+(c(\rho^{n-1}-\rho^n),\theta^n)\leqslant\\ &K\Delta t(\|\rho^{n-1}\|^2+\|c^{\frac12}\theta^n\|^2+\|D_t\rho^n\|^2)+\delta\Delta t\|\boldsymbol{A}^{\frac12}\nabla\theta^n\|^2。\end{aligned}\tag{2.11}$$

综上可得

$$\begin{aligned}\|c^{\frac12}\theta^n\|^2+2\Delta t\|\boldsymbol{A}^{\frac12}\nabla\theta^n\|^2&\leqslant\|c^{\frac12}\theta^{n-1}\|^2+K\Delta t(\|c^{\frac12}\theta^n\|^2+\|c^{\frac12}\theta^{n-1}\|^2)+\\ &K\Delta t(\|D_t\rho^n\|^2+\|\rho^n\|^2+\|\rho^{n-1}\|^2+\|R_1^n\|^2)+\delta\Delta t\|\boldsymbol{A}^{\frac12}\nabla\theta^n\|^2。\end{aligned}\tag{2.12}$$

对估计式(2.12)从 1 到 J 求和可得

$$\|c^{\frac12}\theta^J\|^2+\sum_{n=1}^{J}\Delta t\|\boldsymbol{A}^{\frac12}\nabla\theta^n\|^2\leqslant K\sum_{n=1}^{J}\Delta t\|c^{\frac12}\theta^n\|^2+K(h_u^{2(l+1)}+\Delta t^2)。\tag{2.13}$$

利用离散 Gronwall 引理可得

$$\|\theta^J\|^2+\sum_{n=1}^{J}\Delta t\|\nabla\theta^n\|^2\leqslant K(h_u^{2(l+1)}+\Delta t^2)。\tag{2.14}$$

在式(2.8)中令 $v_h=\theta^n-\theta^{n-1}=\Delta tD_t\theta^n$ 可得

$$\begin{aligned}\Delta t(cD_t\theta^n,D_t\theta^n)+(\boldsymbol{A}\nabla\theta^n,\nabla(\theta^n-\theta^{n-1}))&=-(c(\theta^{n-1}-\bar{\theta}^{n-1},D_t\theta^n)+(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^n),D_t\theta^n)+\\ &\lambda\Delta t(\rho^n,D_t\theta^n)+\Delta t(R_1^n,D_t\theta^n)。\end{aligned}\tag{2.15}$$

因为

$$-(c(\theta^{n-1}-\bar{\theta}^{n-1},D_t\theta^n)\leqslant K\Delta t\|\nabla\theta^{n-1}\|\|D_t\theta^n\|\leqslant K\Delta t\|\boldsymbol{A}^{\frac12}\nabla\theta^{n-1}\|^2+\delta\Delta t\|c^{\frac12}D_t\theta^n\|^2,$$

$$(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^{n}),D_{t}\theta^{n})=(c(\bar{\rho}^{n-1}-\rho^{n-1}),D_{t}\theta^{n})+(c(\rho^{n-1}-\rho^{n}),D_{t}\theta^{n})\leqslant K\Delta t(\|\nabla\rho^{n-1}\|^{2}+\|D_{t}\rho^{n}\|^{2})+\delta\Delta t\|c^{\frac{1}{2}}D_{t}\theta^{n}\|^{2},$$

则可得估计式

$$\|A^{\frac{1}{2}}\nabla\theta^{n}\|^{2}+2\Delta t\|c^{\frac{1}{2}}D_{t}\theta^{n}\|^{2}\leqslant\|A^{\frac{1}{2}}\nabla\theta^{n-1}\|^{2}+K\Delta t\|A^{\frac{1}{2}}\nabla\theta^{n-1}\|^{2}+K\Delta t(\|D_{t}\rho^{n}\|^{2}+\|\rho^{n}\|^{2}+\|\nabla\rho^{n-1}\|^{2}+\|R_{1}^{n}\|^{2})+\delta\Delta t\|c^{\frac{1}{2}}D_{t}\theta^{n}\|^{2}。\tag{2.16}$$

对估计式(2.16)从 1 到 J 求和,并利用离散 Gronwall 引理可得

$$\|\nabla\theta^{J}\|^{2}+\sum_{n=1}^{J}\Delta t\|D_{t}\theta^{n}\|^{2}\leqslant K(h_{u}^{2l}+\Delta t^{2})。\tag{2.17}$$

注意到 $u^{n}-u_{h}^{n}=\theta^{n}+\rho^{n}$, 则式(2.1)成立。

下面估计 π^{n}。在式(1.8)中取 $v=0$,利用引理 1.1 可得

$$(A^{-1}\sigma^{n},\psi)+\Delta t(c^{-1}\mathrm{div}\sigma^{n},\mathrm{div}\psi)=(\bar{u}^{n-1},\mathrm{div}\psi)+\Delta t(c^{-1}f^{n},\mathrm{div}\psi)+\Delta t(c^{-1}R_{1}^{n},\mathrm{div}\psi)。\tag{2.18}$$

将式(2.18)与注 1.1 中式(1.14)相减,则 π^{n} 满足估计式

$$(A^{-1}\pi^{n},\psi_{h})+\Delta t(c^{-1}\mathrm{div}\pi^{n},\mathrm{div}\psi_{h})=-(A^{-1}\varepsilon^{n},\psi_{h})-\Delta t(c^{-1}\mathrm{div}\varepsilon^{n},\mathrm{div}\psi_{h})+(\bar{\theta}^{n-1}+\bar{\rho}^{n-1},\mathrm{div}\psi_{h})+\Delta t(c^{-1}R_{1}^{n},\mathrm{div}\psi_{h})。\tag{2.19}$$

在式(2.9)中取 $\psi_{h}=\pi^{n}$。注意到利用引理 2.1 有不等式

$$(\bar{\theta}^{n-1}+\bar{\rho}^{n-1},\mathrm{div}\pi^{n})=-(\nabla(\bar{\theta}^{n-1}+\bar{\rho}^{n-1}),\pi^{n})\leqslant K(1+\Delta t)(\|\nabla\theta^{n-1}\|^{2}+\|\nabla\rho^{n-1}\|^{2})+\delta\|A^{-\frac{1}{2}}\pi^{n}\|^{2}。\tag{2.20}$$

则对式(2.19)逐项估计可得

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\pi^{n}\|^{2}+\Delta t\|c^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\pi^{n}\|^{2}\leqslant K(\|\varepsilon^{n}\|^{2}+\Delta t\|\mathrm{div}\varepsilon^{n}\|^{2}+\|\nabla\theta^{n-1}\|^{2}+\|\nabla\rho^{n-1}\|^{2}+\Delta t\|R_{1}^{n}\|^{2})+\delta(\|A^{-\frac{1}{2}}\pi^{n}\|^{2}+\Delta t\|c^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\pi^{n}\|^{2})。\tag{2.21}$$

即

$$\|\pi^{n}\|^{2}+\Delta t\|\mathrm{div}\pi^{n}\|^{2}\leqslant K(h_{u}^{2l}+h_{\sigma}^{2(k+1)}+\Delta th_{\sigma}^{2k_{1}}+\Delta t^{3})。\tag{2.22}$$

注意到 $\sigma^{n}-\sigma_{h}^{n}=\pi^{n}+\varepsilon^{n}$, 并且 ε^{n} 满足式(2.3),则式(2.2)成立。综上所述定理 2.1 结论成立。

由定理 2.1 可以得出方法 1 关于变量 u 在 L^{2} 和 H^{1} 范数意义下均达到最优收敛阶;关于变量 σ 在 $H(\mathrm{div};\Omega)$范数意义下达到最优收敛阶。最小二乘特征混合有限元法对于 对流占优扩散方程是合理的。

参考文献:

[1] 罗振东. 混合有限元方法基础及其应用[M].北京:科学出版社,2006:291-306.

[2] YANG Danping. Analysis of least-squares mixed finite element methods for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems[J]. Mathematics of Computioion, 1999, 69(231):929-963.

[3] DOUGLAS Jr J, RUSSELL T F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problemes based on combining the method of characteristics with finite element or finit difference procedures[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(5):871-885.

[4] RUI Hongxing, KIM Seokchan, KIM Sang Dong. A remark on least-squares mixed element methods for reaction-diffusion problems[J]. J Comp Appl Math, 2007, 202(2):230-236.

[5] ADAMS R A. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

[6] RAVIART P A, THOMAS J M. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, Mathematical Aspects of finite element methods, Lecture Notes in Mathematics[C]. Berlin: Springer, 1977, 606:292-315.

[7] NEDELEC J C. Mixed finite element in R^{3}[J]. Numer Math, 1980, 35:315-341.

[8] CIARLET P G. Finite element methods for elliptic problems[M]. New York: North-Holland, 1978.

[9] WHEELER M F. A priori L^{2} error estimates for Galerkin approximation to parabolic partial differential equations[J]. SIAM Numer Anal, 1973, 10(4):723-759.

(编辑:孙培芹)