第 43 卷 第 6 期 Vol.43 No.6
山东大学学报（理学版） Journal of Shandong University(Natural Science)
2008 年 6 月 Jun. 2008

文章编号：1671-9352(2008)06-0053-04

二阶四点边值问题的三解存在性

黄玉梅[1,2]，高德智[1]，秦伟[1]，董鑫[1]

（1. 山东科技大学信息科学与工程学院，山东 青岛 266510；2. 泰山学院数学系，山东泰安 271018）

摘要：讨论了二阶四点边值问题：$-x''(t)=f(t,x(t),x'(t))$，$t\in I=[0,1]$；$x(0)=ax(\xi)$，$x(1)=bx(\eta)$，其中 $0<\xi<\eta<1$，$0\leqslant a,b\leqslant 1$，$f:[0,1]\times[0,\infty]\to[0,\infty]$ 是连续的。利用拓扑度理论讨论了其多个解的存在性。

关键词：上下解；拓扑度；多解

中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A

Existence of three solutions for some second-order four-point boundary value problems

HUANG Yu-mei[1,2], GAO De-zhi[1], QIN Wei[1], DONG Xin[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China;
2. Department of Mathematics, Taishan College, Taian 271018, Shandong, China)

Abstract: The second-order four-point boundary value problem $-x''(t)=f(t,x(t),x'(t))$, $t\in I=[0,1]$; $x(0)=ax(\xi)$, $x(1)=bx(\eta)$ was studied, where $0<\xi<\eta<1$, $0\leqslant a,b\leqslant 1$, and $f:[0,1]\times[0,\infty]\to[0,\infty]$ are non-negative continuous functions. Some degree theory arguments were used to get the multiplicity result.

Key words: upper and lower solutions; toplogical degree; multiple solutions

0 引言

近年来，非线性微分方程边值问题解的存在性和多解性得到了广泛的关注，参见文献[1-6]及相关文献。在文献[1]中，研究了两点边值问题 $x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0$，$t\in[0,1]$；$x(0)=0=x(1)$ 至少存在三个解。文献[1]中的主要假设是存在两个下解 α_1,α_2 和两个上解 β_1,β_2，满足 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，$\beta_1\leqslant\beta_2$ 且 f 满足 Nagumo 条件。本文在存在两个上解和两个下解的条件下，研究如下四点边值问题：

$$-x''(t)=f(t,x(t),x'(t)),\ t\in I=[0,1],\ x(0)=ax(\xi),\ x(1)=bx(\eta)。\tag{0.1}$$

1 准备工作

为证明主要结果，需用到下面的定理。

定义 1 若 $\alpha(t)\in C^2(I)$，满足

$$-\alpha''(t)\leqslant f(t,\alpha(t),\alpha'(t)),\ 0<t<1,\tag{1.1}$$

$$\alpha(0)\leqslant a\alpha(\xi),\ \alpha(1)\leqslant b\alpha(\eta),\tag{1.2}$$

则称 α 是边值问题(0.1)的下解，同理，当 $\beta(t)\in C^2(I)$ 满足类似反方向的不等式时，称 β 为边值问题(0.1)

收稿日期：2007-10-10

作者简介：黄玉梅（1982- ），女，硕士研究生，研究方向为函数论与应用泛函分析. Email：huangyuer8228@163.com

的上解。

定义 2 设 α 和 β 分别是边值问题(0.1)的一个下解和一个上解,且在[0,1]上满足 $\alpha\leqslant\beta$,称 α 和 β 满足 Nagumo 条件,如果存在函数 $\phi\in C([0,\infty),(0,+\infty))$,使得对于所有的$(t,x,y)\in[0,1]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times\mathbf{R}$有

$$|f(t,x,y)|\leqslant\phi(|y|)\tag{1.3}$$

和

$$\int_0^\infty\frac{s}{\phi(s)}\mathrm{d}s=\infty。\tag{1.4}$$

由文献[2]知边值问题 $-x''(t)=0,\ 0<t<1;x(0)=ax(\xi),x(1)=bx(\eta)$ 的格林函数为

$$G(t,s)=\begin{cases}s\in[0,\xi]:G_1(t,s),\\ s\in[\xi,\eta]:G_2(t,s),\\ s\in[\eta,1]:G_3(t,s),\end{cases}$$

其中 $I=[0,1],G_i:I\times I\to\mathbf{R}$ 为

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{s}{\delta}[(1-b\eta)+(b-1)t], & s\leqslant t,\\ \dfrac{t}{\delta}[(1-b\eta)+(b-1)s]+\dfrac{(\delta-1+b\eta)(s-1)}{\delta}, & t\leqslant s;\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta}[(1-b\eta)+(b-1)t](a\xi-as+s), & s\leqslant t,\\ \dfrac{1}{\delta}[(1-b\eta)+(b-1)s](a\xi-at+t), & t\leqslant s;\end{cases}$$

$$G_3(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1-s}{\delta}[t-at+a\xi]+(s-t), & s\leqslant t,\\ \dfrac{1-s}{\delta}(t+a\xi-at), & t\leqslant s。\end{cases}$$

有 $0\leqslant G(t,s)\leqslant\dfrac{\rho}{\delta}$,其中 $\rho=\max\{\xi,\eta,1-\xi,1-\eta\}$。

定义 $L:C(I)\to C^1(I)$ 为 $L\phi(t)=\int_0^1G(t,s)\phi(s)\mathrm{d}s$,

$\hat{f}:C^1(I)\to C(I)$ 为 $\hat{f}(\phi)(t)=f(t,\phi(t),\phi'(t))$,

则 x 是(0.1)的解当且仅当 $x\in C^1(I)$ 是$(I-L\hat{f})x=0$的解,即是 $L\hat{f}$ 的不动点,其中 $L\hat{f}:C(I)\to C(I)$ 是一个紧映射。

2 主要结果

定理 1 假设

(A1) $\alpha_1,\alpha_2\in C^2(I)$ 和 $\beta_1,\beta_2\in C^2(I)$ 分别是边值问题(0.1)的两个下解和两个上解,且在[0,1]上满足 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\beta_2,\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2$ 和 $\alpha_2\not\leqslant\beta_1$;

(A2) $f:[0,1]\times[0,\infty]\to[0,\infty]$ 是一个连续函数;

(A3) f 在$\{(t,x):\alpha_1(t)\leqslant x\leqslant\beta_2(t),t\in(0,1)\}$上满足 Nagumo 条件;

(A4) α_2,β_1 不是(0.1)的解;

则边值问题(0.1)至少有三个解 x_1,x_2,x_3,在 I 上满足

$$\alpha_1\leqslant x_1\leqslant\beta_1,\ \alpha_2\leqslant x_2\leqslant\beta_2,\ x_3\not\leqslant\beta_1,\ x_3\not\geqslant\alpha_2。\tag{2.1}$$

证明 设 $\lambda=\max\{a|\alpha(\xi)|,a|\beta(\xi)|,b|\alpha(\eta)|,b|\beta(\eta)|\}$。$f$ 满足 Nagumo 条件,对所有的 $x\in[\min\alpha_1(t),\max\beta_2(t)]$,存在 Nagumo 函数 $\omega:[0,\infty)\to(0,+\infty)$ 和取决于 α,β,ω 的常数 $N>\lambda$,满足:

$$|f(t,x,x')|\leqslant\omega(|x'|),\ 其中(t,x)\in I\times[\min\alpha_1(t),\max\beta_2(t)],$$

且

$$\int_\lambda^N\frac{s}{\omega(s)}\mathrm{d}s>\max_{t\in I}\beta(t)-\min_{t\in I}\alpha(t)。\tag{2.2}$$

设 $C > \max\{N, \|\alpha'\|, \|\beta'\|\}$,并定义:$q(y) = \max\{-C, \min\{y, C\}\}$,则 $q(y)$ 收缩到$[-C, C]$。利用 α_1 和 β_2 构造 $F(t, x, x')$,得到一个与原问题同解的新的边值问题。

设 $\varepsilon > 0$ 是一个定数,定义 F 为:

$$F(t,x,x') = \begin{cases} f(t,\beta_2(t),\beta'_2(t)) + \dfrac{x-\beta_2(t)}{1+|x-\beta_2(t)|}, & x \geqslant \beta_2(t)+\varepsilon, \\ f(t,\beta_2(t),q(x')) + \Big[f(t,\beta_2(t),\beta'_2(t)) + \\ \qquad \dfrac{x-\beta_2(t)}{1+|x-\beta_2(t)|} - f(t,\beta_2(t),q'_2(t))\Big]\dfrac{x-\beta_2(t)}{\varepsilon}, & \beta_2(t) \leqslant x \leqslant \beta_2(t)+\varepsilon, \\ f(t,x,q(x')), & \alpha_1(t) \leqslant x \leqslant \beta_2(t), \\ f(t,\alpha_1(t),q(x')) + \Big[f(t,\alpha_1(t),\alpha'_1(t)) + \\ \qquad \dfrac{\alpha_1(t)-x}{1+|\alpha_1(t)-x|} - f(t,\alpha_1(t),q(x'))\Big]\dfrac{\alpha_1(t)-x}{\varepsilon}, & \alpha_1(t)-\varepsilon \leqslant x \leqslant \alpha_1(t), \\ f(t,\alpha_1(t),\alpha'_1(t)) + \dfrac{\alpha_1(t)-x}{1+|\alpha_1(t)-x|}, & x \leqslant \alpha_1(t)-\varepsilon, \end{cases}$$

F 在$I \times \mathbf{R}^2$ 上是连续的,则存在 $M > 0$使的在 $I \times \mathbf{R}^2$ 上有 $|F(t, x, x')| \leqslant M$。选择 M_1 使 $M_1 > \max\{\|\alpha_1\|, \|\beta_2\|, M/\delta\}$,考虑修改后的问题

$$-x''(t) = F(t,x(t),x'(t)),\ t \in I = [0,1], x(0) = ax(\xi),\ x(1) = bx(\eta), \tag{2.3}$$

定义 $\hat{F}: C^1(I) \to C(I)$ 为 $\hat{F}(t) = F(t, x(t), x'(t)), t \in I$。

则 x 是(2.3) 的解当且仅当 $x \in C^1(I)$ 是 $L\hat{f}$ 的一个不动点。由 F 的定义和 C 的选取,有

$$F(t,\alpha_1(t),\alpha'_1(t)) = f(t,\alpha_1(t),\alpha'_1(t)) \geqslant -\alpha''_1(t),\ t \in I,$$
$$F(t,\beta_2(t),\beta'_2(t)) = f(t,\beta_2(t),\beta'_2(t)) \leqslant -\beta''_2(t),\ t \in I,$$

所以 α_1, β_2 是(2.3) 的下解和上解。此外,对所有$(t, x) \in I \times [\min \alpha_1(t), \max \beta_2(t)]$有

$$|f(t,x,x')| = \left|f(t,x,q(x'(t)))\right| \leqslant \omega(|q(x'(t))|) = \tilde{\omega}(|x'|),$$

其中 $\tilde{\omega}(s) = \omega(q(s)), s \geqslant 0$,$F$ 满足 Nagumo 条件。

因为$\int_\lambda^\infty \dfrac{s}{\tilde{\omega}(s)}\mathrm{d}s = \int_\lambda^C \dfrac{s}{\omega(s)}\mathrm{d}s + \int_C^\infty \dfrac{s}{\omega(C)}\mathrm{d}s = \infty$,由(2.3),有

$$\int_\lambda^C \frac{s}{\tilde{\omega}(s)}\mathrm{d}s > \int_\lambda^N \frac{s}{\omega(s)}\mathrm{d}s > \max_{t\in I}\beta(t) - \min_{t\in I}\alpha(t),$$

所以,由文献[3] 中定理(1.4.1) 证明的结论知,在 I 上有 $|x'(t)| < C$。因此式(2.3) 满足 $\alpha_1(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta_2(t), t \in I$ 的解 x,满足 $|x'(t)| < C, t \in I$,因此是(0.1) 上的解。

下证(2.3) 的解 x 满足$\alpha_1(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta_2(t), t \in I$。

假设在 I 上$\alpha_1(t) \nleqslant x(t)$,则 $v(t) = \alpha_1(t) - x(t)$ 在某一点 $t_0 \in I$ 取到正的最大值。已知边界条件为 $v(0) \leqslant av(\xi), v(1) \leqslant bv(\eta)$。

若 $t_0 \neq 0,1$,则 $v'(t_0) = 0, v''(t_0) < 0$,若 $0 < v(t_0) < \varepsilon$,则

$$v''(t_0) = \alpha''_1(t_0) - x''(t_0) \geqslant -f(t_0,\alpha_1(t_0),\alpha'_1(t_0)) + \left[f(t_0,\alpha_1(t_0),\alpha'_1(t_0)) + \frac{v^2(t_0)}{\varepsilon(1+v(t_0))}\right] > 0,$$

推出矛盾;若 $v(t_0) \geqslant \varepsilon$,则

$$v''(t_0) = \alpha''_1(t_0) - x''(t_0) \geqslant -f(t_0,\alpha_1(t_0),\alpha'_1(t_0)) +$$
$$\left[f(t_0,\alpha_1(t_0),\alpha'_1(t_0)) + \frac{v(t_0)}{(1+v(t_0))}\right] = \frac{v(t_0)}{(1+v(t_0))} > 0,$$

也推出矛盾。此时,$v(t)$ 没有正的最大值。

若 $t_0 = 1$,则 $v(1) \geqslant 0, v'(1) \geqslant 0$。如果 $v(1) = 0$,则边界条件为 $v(1) \leqslant bv(\eta)$ 即有 $v(\eta) \geqslant 0$,则 $v(1)$ 不是 $v(t)$ 的最大值。因此 $v(1) > 0$,又 $0 \leqslant b \leqslant 1$,则 $v(1) \leqslant v(\eta)$,所以 $v(1)$ 不是 v 的最大值。

若 $t_0 = 0$,则 $v(0) \geqslant 0, v'(0) \leqslant 0$。如果 $v(0) = 0$,则由边界条件 $v(0) \leqslant av(\xi)$ 知 $v(\xi) \geqslant 0$,则 $v(0)$ 不是 $v(t)$ 的最大值。因此 $v(0) > 0$,又 $0 \leqslant a \leqslant 1$,则 $v(0) \leqslant v(\xi)$,所以 $v(1)$ 不是 v 的最大值。

由 $v(t)\leqslant 0$ 可知在 I 上 $\alpha_1(t)\leqslant x(t)$。同理,可以证明 $x(t)\leqslant\beta_2(t),t\in I$。则可得 (2.3) 的解 x_1, x_2, x_3 满足 $\alpha_1(t)\leqslant x_i(t)\leqslant\beta_2(t)$, $t\in I$, $i=1,2,3$。

设 $\Omega=\{x\in C^1(I): |x(t)|<M_1, |x'(t)|<L, t\in I\}$, 则 Ω 是 $C^1(I)$ 上的有界开子集。因为 $L\hat{F}(\bar{\Omega})\subset\Omega$, 则有 $\deg(I-L\hat{F},\Omega,0)=\deg(I,\Omega,L\hat{F})=1$。

设 $\Omega_{\alpha_2}=\{x\in\Omega: x(t)>\alpha_2(t), t\in(0,1)\}$, $\Omega^{\beta_1}=\{x\in\Omega: x(t)\leqslant\beta_1(t), t\in(0,1)\}$ 因为在 I 上 $\alpha_2\not\leqslant\beta_1$ 则 $\Omega_{\alpha_2}\neq\emptyset\neq\Omega^{\beta_1}$, $\bar{\Omega}_{\alpha_2}\cap\bar{\Omega}^{\beta_1}=\emptyset$, $\Omega\setminus\{\bar{\Omega}_{\alpha_2}\cup\bar{\Omega}^{\beta_1}\}\neq\emptyset$, 由(A4)知在 $\partial\Omega_{\alpha_2}\cup\partial\Omega^{\beta_1}$ 上没有解,因此

$$\deg(I-L\hat{F},\Omega,0)=\deg\left(I-L\hat{F},\Omega\setminus\{\Omega_{\alpha_2}\cup\Omega^{\beta_1}\},0\right)+\deg(I-L\hat{F},\Omega_{\alpha_2},0)+\deg(I-L\hat{F},\Omega^{\beta_1},0)。\tag{2.4}$$

下面证明 $\deg(I-L\hat{F},\Omega_{\alpha_2},0)=\deg(I-L\hat{F},\Omega^{\beta_1},0)=1$。

首先证 $\deg(I-L\hat{F},\Omega_{\alpha_2},0)=1$。定义 $F_2(t,x,x')$ 如下:

$$F_2(t,x,x')=\begin{cases} f(t,\beta_2(t),\beta'_2(t))+\dfrac{x-\beta_2(t)}{1+|x-\beta_2(t)|}, & x\geqslant\beta_2(t)+\varepsilon,\\ f(t,\beta_2(t),q(x'))+\Big[f(t,\beta_2(t),\beta'_2(t))+ & \\ \qquad\dfrac{x-\beta_2(t)}{1+|x-\beta_2(t)|}-f(t,\beta_2(t),q(x'))\Big]\dfrac{x-\beta_2(t)}{\varepsilon}, & \beta_2(t)\leqslant x\leqslant\beta_2(t)+\varepsilon,\\ f(t,x,q(x')), & \alpha_2(t)\leqslant x\leqslant\beta_2(t),\\ f(t,\alpha_2(t),q(x'))+\Big[f(t,\alpha_2(t),\alpha'_2(t))+ & \\ \qquad\dfrac{\alpha_2(t)-x}{1+|\alpha_2(t)-x|}-f(t,\alpha_2(t),q(x'))\Big]\dfrac{\alpha_2(t)-x}{\varepsilon}, & \alpha_2(t)-\varepsilon\leqslant x\leqslant\alpha_2(t),\\ f(t,\alpha_2(t),\alpha'_2(t))+\dfrac{\alpha_2(t)-x}{1+|\alpha_2(t)-x|}, & x\leqslant\alpha_2(t)-\varepsilon。\end{cases}$$

考虑

$$-x'(t)=F_2(t,x,x'),\ t\in I=[0,1],\ x(0)=ax(\xi),\ x(1)=bx(\eta),\tag{2.5}$$

则(2.5) 等价于$(I-L\hat{F}_2)=0$,其中 $\hat{F}_2(t)=F_2(t,x(t),x'(t))$。

类似第一部分证明,可知(2.5) 的解 x 满足 $x\geqslant\alpha_2$, $t\in I$,由(A4) 知 $x\neq\alpha_2 t\in(0,1)$, 因此 $x\in\Omega_{\alpha_2}$, 因为 $L\hat{F}_2(\bar{\Omega})\subseteq\Omega$, 则有 $\deg(I-L\hat{F}_2,\Omega,0)=1$。又因为在 Ω_{α_2} 中 $F_2=F$,则有

$$\deg(I-L\hat{F}_2,\Omega_{\alpha_2},0)=\deg(I-L\hat{F}_2,\Omega\setminus\bar{\Omega}_{\alpha_2},0)+\deg(I-L\hat{F}_2,\Omega_{\alpha_2},0)=\deg(I-L\hat{F}_2,\Omega,0)=1。$$

同理可得 $\deg(I-L\hat{F},\Omega^{\beta_1},0)=1$,因此由(2.4) 得

$$\deg\left(I-L\hat{F},\Omega\setminus\bar{\Omega}_{\alpha_2}\cup\bar{\Omega}^{\beta_1},0\right)=-1,$$

所以边值问题(0.1) 有三个解,分别存在于集合 Ω_{α_2}, Ω^{β_1} 和 $\Omega\setminus\bar{\Omega}_{\alpha_2}\cup\bar{\Omega}^{\beta_1}$ 中。

参考文献:

[1] HENDERSON J, THOMPSON H B. Existence of multiple solutions for second order boundary value problems[J]. J Differential Equations, 2000, 166:443-454.

[2] BAI Zhanbing, GE Weigao, YANG Yifu. Maltiplicity results for some second-order four-point boundary value problems[J]. Nonlinear Anal, 2005, 60:491-500.

[3] BERNFELD S R, LAKSLAMIKANTHAM V. An introduction to nonlinear boundary value problems[M]. New York: Academic Press, 1974.

[4] BAI Zhanbing, DU Zengji. Positive solutions for some second-order four-point boundary value problems[J]. Math Anal, 2007, 330:34-50.

[5] Rahmat Alt Khan, WEBB J R L. Existence of least three solutions of a second-order three-point boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 64:1356-1366.

[6] CUPTA C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. Math Anal Appl, 1992, 168:540-551.

(编辑:李晓红)