第43卷 第10期
Vol.43 No.10

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2008年10月
Oct. 2008

文章编号:1671-9352(2008)10-0052-04

# 反模糊子环和反模糊理想

祝令江,王开宝,王莉,姚炳学
(聊城大学数学与系统科学学院, 山东 聊城 252059)

**摘要**:本文给出环上模糊子集的和,差,积运算,并且利用和,差,积运算性质,推导出反模糊子环的等价条件及其性质,提出反模糊理想的概念并研究了其性质。

**关键词**:反模糊子环;反模糊理想;模糊子集;模糊子环
**中图分类号**:O159 **文献标志码**:A

# Anti-fuzzy subrings and anti-fuzzy ideals

ZHU Ling-jiang, WANG Kai-bao, WANG-Li, YAO Bing-xue
(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, China)

**Abstract**: The operation of addition, subtraction and multiplication of fuzzy subsets was given. Equivalent condition and qualities of anti-fuzzy subrings were reduced by the qualities of addition, subtraction and multiplication. The concepts of anti-fuzzy ideals were put forward and the properties were discussed.

**Key words**: anti-fuzzy subrings; anti-fuzzy ideals; fuzzy subset; fuzzy subring

## 0 引言

1971年Rosenfeld在文献[1]首次提出模糊子群的概念,从而开创了模糊代数学研究的新课题。1990年,R. Biswas在文献[2]中提出反模糊子群的概念,随后,不少学者对反模糊子群展开了一系列有意义的研究[3,4]。本文在文献[5]的思想下提出反模糊子环和反模糊理想的概念并讨论了它们的一些性质,进一步丰富和完善了模糊环理论。

## 1 反模糊子环

$\inf \Phi = 1$

**定义 1.1** 设 $A$ 是论域 $X$ 到 $[0,1]$ 的一个映射,即 $A: X \to [0,1]$, $x \to A(x)$,称 $A$ 是 $X$ 的模糊子集,而函数 $A(.)$ 称为模糊子集 $A$ 的隶属函数,$A(x)$ 称为 $x$ 对 $A$ 的隶属度。

对于论域 $X$ 的模糊子集 $A \subseteq B \Rightarrow A(x) \leqslant B(x)$, $\forall x \in X$. $A = B \Rightarrow A(x) = B(x)$, $\forall x \in X$。$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$。

**定义 1.2** 设 $A, B$ 为环 $R$ 的模糊子集,它们的和,差,积,定义如下:

$$(A+B)(x) = \inf\{A(y) \vee B(z) \mid x = y + z\},$$
$$(A-B)(x) = \inf\{A(y) \vee B(z) \mid x = y - z\},$$

**收稿日期**:2008-02-20
**基金项目**:教育部科技研究重点项目(206089)
**作者简介**:祝令江(1980- ),男,硕士,研究方向:模糊代数,粗糙集. Email: zhulingjiang2008@163.com

$$(A.B)(x)=\inf\{A(y)\vee B(z)\mid x=yz\}。$$

$A.B$ 可以简记为 $AB$, $A^1=A$, $A^n=A^{n-1}.A$, $n>1$。

**性质 1.1** 设 $A$, $B$ 为环 $R$ 的模糊子集,则:

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A=(B+C)$;

(3) $(AB)C=A(BC)$;

(4) $A\subseteq B\Rightarrow AC\subseteq BC$, $CA\subseteq CB$, $A+C\subseteq B+C$;

(5) $A(B+C)\supseteq AB+AC$, $(B+C)A\supseteq BA+CA$;

**证明** (1),(2)略,下面证(3): $\forall x\in R$, $((AB)C)(x)=\inf\{(AB)(y)\vee C(z)\mid x=yz\}=\inf\{A(\mu)\vee B(\nu)\vee C(z)\mid y=\mu\nu, x=yz\}=\inf\{A(\mu)\vee B(\nu)\vee C(z)\mid x=\mu\nu z\}$。同理可证 $(A(BC))(x)=\inf\{A(\mu)\vee B(\nu)\vee C(z)\mid x=\mu\nu z\}$ 故结论成立。再证(4): $\forall x\in R$,若 $x=yz$,又 $A\subseteq B\Rightarrow A(y)\leqslant B(y)\Rightarrow A(y)\vee C(z)\leqslant B(y)\vee C(z)\Rightarrow\inf\{A(y)\vee C(z)\mid x=yz\}\leqslant\inf\{B(y)\vee C(z)\mid x=yz\}\Rightarrow AC\subseteq BC$,同理 $CA\subseteq CB$。易证 $A+C\subseteq B+C$。

最后来证(5): $\forall x\in R$,若 $x=yz$,则: $A(y)\vee(B+C)(z)=A(y)\vee\inf\{B(\mu)\vee C(\nu)\mid z=\mu+\nu\}=\inf\{A(y)\vee B(\mu)\vee C(\nu)\mid z=\mu+\nu\}\geqslant\inf\{(A(y)\vee B(\mu))\vee(A(y)\vee C(\nu))\mid yz=y\mu+y\nu\}\geqslant\inf\{(AB)(y\mu)\vee(AC)(y\nu)\mid yz=y\mu+y\nu\}=(AB+AC)(x)$,因此 $(A(B+C))(x)=\inf\{A(y)\vee(B+C)(z)\mid x=yz\}\geqslant(AB+BC)(x)$。若不存在 $y$, $z$ 使 $x=yz$,结论显然成立。同理可证 $(B+C)A\supseteq BA+CA$。

**定义 1.3** 设 $A$ 为集合 $X$ 的模糊子集, $A_\lambda=\{x\in X\mid A(x)\leqslant\lambda\}$, $A_{(\lambda)}=\{x\in X\mid A(x)<\lambda\}$ 分别称为 $A$ 的 $\lambda$-下截集, $\lambda$-下强截集。

**定义 1.4** 设 $f$ 为集合 $X$ 到 $Y$ 的映射, $f^{-1}$ 为其逆映射, $A$ 为 $X$ 的模糊子集, $f(A)$ 为 $Y$ 的模糊子集 $f(A)(y)\triangleq\inf\{A(x)\mid f(x)=y, x\in X\}$, $\forall y\in Y$。$B$ 为 $Y$ 的模糊子集, $f^{-1}(B)$ 为 $X$ 的模糊子集, $f^{-1}(B)(x)\triangleq B(f(x))$, $\forall x\in X$。

**定义 1.5** 设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,称 $A$ 为 $R$ 的模糊子加群,若 $A$ 满足:

$$A(x+y)\leqslant A(x)\vee A(y),\ A(-x)\leqslant A(x),\ \forall x,y\in R。$$

**定义 1.6** 设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,称 $A$ 为 $R$ 的模糊子半环,若 $A$ 满足:

$$A(x+y)\leqslant A(x)\vee A(y),\ A(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)。$$

**定义 1.7** 设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,称 $A$ 为 $R$ 的模糊子环,若 $A$ 满足:

$$A(x+y)\leqslant A(x)\vee A(y),\ A(-x)\leqslant A(x),\ A(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)。$$

记 $A_*=\{x\in R\mid A(x)=A(0)\}$, $H(A)=\sup\{A(x)\mid x\in R\}$。不难证明反模糊子环等价于 $A(x-y)\leqslant A(x)\vee A(y, A(xy))\leqslant A(x)\vee A(y)$。

**定理 1.1** 设 $A$ 为环 $R$ 的反模糊子环,则对任意 $x\in R$,

(1) $A(x)=A(-x)$; (2) $A(0)\leqslant A(x)$。

**证明** (1) $A(-x)\leqslant A(x)=A(-(-x))\leqslant A(-x)$,故结论成立。

(2) $A(0)=A(x-x)\leqslant A(x)\vee A(x)=A(x)$,故结论成立。

**定理 1.2** 设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,则 $A$ 为反模糊子半环的充要条件为:

$$A+A\supseteq A,\ A^2\supseteq A。$$

**证明** 必要性: $\forall x\in R$,设 $x=x_1+x_2$,因为 $A$ 为反模糊子环,所以 $A(x)=A(x_1+x_2)\leqslant A(x_1)\vee A(x_2)$, $A(x)\leqslant\inf\{A(x_1)\vee A(x_2)\mid x=x_1+x_2\}=(A+A)(x)$ 所以 $A+A\supseteq A$。若有 $x=x_1x_2$,则 $A(x)=A(x_1x_2)\leqslant A(x_1)\vee A(x_2)$,于是, $A(x)\leqslant\inf\{A(x_1)\vee A(x_2)\mid x=x_1x_2\}=A^2(x)$,故 $A^2\supseteq A$。若不存在 $x_1$, $x_2$ 使 $x=x_1x_2$ 成立,结论显然成立。

充分性:因为 $A+A\supseteq A$, $A^2\supseteq A$,则 $\forall x,y\in R$,有 $A(x+y)\leqslant(A+A)(x+y)\leqslant A(x)\vee A(y)$, $A(xy)\leqslant A^2(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)$。故结论成立。

**定理 1.3** 设 $A$ 为环的模糊子集,则 $A$ 为反模糊子环的充要条件为:

$$A+A\supseteq A,\ A^2\supseteq A,\ A\supseteq -A。$$

证明略。

**定理 1.4**　设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,则 $A$ 为反模糊子环的充要条件为:

$$A-A\supseteq A,\ A^2\supseteq A。$$

证明略。

**定理 1.5**　$A$ 为环 $R$ 的反模糊子环,则 $A(x-y)=A(0)\Rightarrow A(x)=A(y)$。

**证明**　$A(x)=A(x-y+y)\leqslant A(x-y)\vee A(y)=A(0)\vee A(y)=A(y)$,同理 $A(y)\leqslant A(x)$。故结论成立。

**定理 1.6**　设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,则 $A$ 为反模糊子环的充要条件为 $\forall\lambda\in[A(0),H(A)]$,$A_\lambda$ 是 $R$ 的子环。

**证明**　必要性:$\forall\lambda\in[A(0),H(A)]$,则 $A_\lambda$ 非空,因为 $0\in A_\lambda$。$\forall x,y\in A_\lambda$,则 $A(x)\leqslant\lambda$,$A(y)\leqslant\lambda$,于是 $A(x-y)\leqslant A(x)\vee A(y)\leqslant\lambda\vee\lambda=\lambda$,$A(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)\leqslant\lambda$,所以 $x-y\in A_\lambda$,$xy\in A_\lambda$,从而 $A_\lambda$ 是 $R$ 的子环。

充分性:$\forall x,y\in R$,设 $A(x)\vee A(y)=\lambda$,则 $x,y\in A_\lambda$,显然 $\lambda\in[A(0),H(A)]$,由于 $A_\lambda$ 是 $R$ 的子环,所以 $x-y,xy\in A_\lambda$,即 $A(x-y)\leqslant\lambda$,$A(xy)\leqslant\lambda$,从而 $A(x-y)\leqslant A(x)\vee A(y)$,$A(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)$,因此 $A$ 为反模糊子环。

**推论 1.1**　设 $A$ 为环 $R$ 的反模糊子环,则 $A_*$ 是 $R$ 的子环。

**定理 1.7**　设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,则 $A$ 为反模糊子环的充要条件为 $\forall\lambda\in(A(0),H(A)]$,$A_{(\lambda)}$ 是 $R$ 的子环。

**证明**　必要性:$\forall\lambda\in(A(0),H(A)]$,则 $A_{(\lambda)}$ 非空,$\forall x,y\in A_{(\lambda)}$,于是 $A(x-y)\leqslant A(x)\vee A(y)<\lambda\vee\lambda=\lambda$,$A(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)<\lambda\vee\lambda=\lambda$,即 $x-y\in A_\lambda$,$xy\in A_\lambda$,所以 $A_{(\lambda)}$ 是 $R$ 的子环。

充分性:设 $\forall\lambda\in(A(0),H(A)]$,$A_{(\lambda)}$ 是 $R$ 的子环,若存在 $x_0,y_0\in R$,使 $A(x_0-y_0)>A(x_0)\vee A(y_0)$,取 $\lambda=A(x_0-y_0)$,则 $\lambda\in(A(0),H(A)]$,且 $x_0,y_0\in A_{(\lambda)}$,但 $x_0-y_0\notin A_{(\lambda)}$,这与 $A_{(\lambda)}$ 是 $R$ 的子环矛盾。因此对所有的 $x,y\in R$,有 $A(x-y)\leqslant A(x)\vee A(y)$,同理 $A(xy)\leqslant A(x)\vee A(y)$,所以 $A$ 为 $R$ 的反模糊子环。

**定理 1.8**　设 $A,B$ 是环 $R$ 的反模糊子环,则 $A\cup B$ 也是环 $R$ 的反模糊子环。

证明略。

**定理 1.9**　设 $f:R_1\to R_2$ 为环的同态映射,$A,B$ 分别为环 $R_1$ 与环 $R_2$ 的反模糊子环,则

(1) $f(A)$为环 $R_2$ 的反模糊子环; (2) $f^{-1}(B)$为环 $R_1$ 的反模糊子环。

**证明**　(1) $\forall y_1,y_2\in R_2$,则 $f(A)(y_1-y_2)=\inf\{A(x_1-x_2)\mid f(x_1-x_2)=y_1-y_2\}\leqslant\inf\{A(x_1)\vee A(x_2)\mid f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2\}=\inf\{A(x_1)\mid f(x_1)=y_1\}\vee\inf\{A(x_2)\mid f(x_2)=y_2\}=f(A)(y_1)\vee f(A)(y_2)$,$f(A)(y_1y_2)=\inf\{A(x_1x_2)\mid f(x_1x_2)=y_1y_2\}\leqslant\inf\{A(x_1)\vee A(x_2)\mid f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2\}=\inf\{A(x_1)\mid f(x_1)=y_1\}\vee\inf\{A(x_2)\mid f(x_2)=y_2\}=f(A)(y_1)\vee f(A)(y_2)$,故 $f(A)$为环 $R_2$ 的反模糊子环。

(2) $\forall x_1,x_2\in R_1$,$f^{-1}(B)(x_1-x_2)=B(f(x_1-x_2))=B(f(x_1)-f(x_1))\leqslant B(f(x_1))\vee B(f(x_2))=f^{-1}(B)(x_1)\vee f^{-1}(B)(x_2)$,故 $f^{-1}(B)$为环 $R_1$ 的反模糊子环。

## 2　反模糊理想

**定义 2.1**　设 $A$ 为环 $R$ 的反模糊子环,称 $A$ 为环 $R$ 的反模糊左理想(反模糊右理想),若 $\forall x,y\in R$,$A(xy)\leqslant A(y)(A(xy)\leqslant A(x))$,若 $A$ 既是反模糊左理想又是反模糊右理想,则称 $A$ 为反模糊理想。

**定义 2.2**　设 $A$ 为环 $R$ 的反模糊子环,称 $A$ 为环 $R$ 的反模糊双理想(反模糊内理想),若 $\forall x,y,z\in R$,$A(xyz)\leqslant A(x)\vee A(z)(A(xyz)\leqslant A(y))$。

**定义 2.3**　设 $A$ 为环 $R$ 的子环,称 $A$ 为 $R$ 的左理想(右理想),若 $r\in R,s\in A\Rightarrow rs\in A(sr\in A)$;称 $A$ 为 $R$ 的双理想,若 $r\in R,s_1,s_2\in A\Rightarrow s_1rs_2\in A$;称 $A$ 为 $R$ 的内理想,若 $s\in A,\forall r_1,r_2\in R\Rightarrow r_1sr_2\in A$;若 $A$ 既是左

理想又是右理想,则称 $A$ 为环 $R$ 的理想。

**定理 2.1** 设 $A$ 为环 $R$ 的反模糊子环,则:

(1) $A$ 为环 $R$ 的反模糊左理想(反模糊右理想)$\Leftrightarrow 0_R A \supseteq A(A\,0_R \supseteq A)$;

(2) $A$ 为环 $R$ 的反模糊理想$\Leftrightarrow 0_R A \cap A\,0_R \supseteq A$;

(3) $A$ 为环 $R$ 的反模糊双理想(反模糊内理想)$\Leftrightarrow A0_R A \supseteq A(0_R A\,0_R \supseteq A)$。

**证明** (1) $\Leftarrow$由 $0_R A \supseteq A$,对$\forall x, y \in R$, $A(xy) \leqslant (0_R A)(xy) \leqslant 0_R(x) \vee A(y) = A(y)$,所以 $A$ 为环 $R$ 的反模糊左理想。$\Rightarrow A$ 为环 $R$ 的反模糊左理想,$\forall x \in R$,若有 $y, z \in R$,使 $x = yz$,则 $A(x) = A(yz) \leqslant A(z) = 0_R(y) \vee A(z)$,所以 $A(x) \leqslant \inf\{0_R(y) \vee A(z) \mid x = yz\} = (0_R A)(x)$故 $0_R A \supseteq A$,若不存在 $y, z \in R$,使 $x = yz$,结论显然成立。同理可证反模糊右理想。

(2) 由(1)即可证得。

(3) $\Rightarrow A$ 为环 $R$ 的反模糊双理想,$\forall x \in R$,若有 $y, z, w \in R$,使 $x = yzw$,则 $A(x) = A(yzw) \leqslant A(y) \vee A(w) = A(y) \vee 0_R(z) \vee A(w)$,于是 $A(x) \leqslant \inf\{A(y) \vee 0_R(z) \vee A(w) \mid x = yzw\} = (A0_R A)(x)$,所以 $A0_R A \supseteq A$,若不存在 $y, z, w \in R$,使 $x = yzw$,结论显然成立。

$\Leftarrow$由 $A0_R A \supseteq A$,则$\forall x, y, z \in R$, $A(xyz) \leqslant (A0_R A)(xyz) \leqslant A(x) \vee 0_R(y) \vee A(z) = A(x) \vee A(z)$,所以 $A$ 为环 $R$ 的反模糊双理想。同理可证反模糊内理想情况。

**定理 2.2** 设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,则 $A$ 为环 $R$ 的反模糊理想(反模糊双理想,反模糊内理想)的充要条件为$\forall \lambda \in [A(0), H(A)]$, $A_\lambda$ 是环 $R$ 的理想(双理想,内理想)。

**证明** 必要性:设 $A$ 为环 $R$ 的反模糊理想,由定理 1.5 可知$\forall \lambda \in [A(0), H(A)]\,A_\lambda$ 是环 $R$ 的子环,$\forall x \in A_\lambda$, $\forall r \in R$, $A(xr) \leqslant A(x) \leqslant \lambda$,即 $xr \in A_\lambda$ 同理 $rx \in A_\lambda$,所以 $A_\lambda$ 是环 $R$ 的理想。

充分性:若$\forall \lambda \in [A(0), H(A)]$, $A_\lambda$ 是环 $R$ 的子环,则由定理 1.5 可知,$A$ 为环 $R$ 的反模糊子环。$\forall x, y \in R$,记 $A(x) = \lambda$,则 $x \in A_\lambda$,且 $\lambda \in [A(0), H(A)]$,故 $A_\lambda$ 是 $R$ 的理想,于是 $xy \in A_\lambda$,即 $A(xy) \leqslant \lambda = A(x)$,同理,$A(xy) \leqslant A(y)$,所以 $A$ 为环 $R$ 的反模糊理想。同理可证其他情况。

**推论 2.1** $A$ 为环 $R$ 的反模糊理想(反模糊左理想,反模糊右理想,反模糊双理想,反模糊内理想),则 $A_*$ 是环 $R$ 的理想(左理想,右理想, 双理想,内理想)。

**定理 2.3** 设 $A$ 为环 $R$ 的模糊子集,则 $A$ 为环 $R$ 的反模糊理想(反模糊双理想,反模糊内理想)的充要条件为$\forall \lambda \in (A(0), H(A)]$, $A_{(\lambda)}$是环 $R$ 的理想(双理想,内理想)。

证明略。

**参考文献:**

[1] ROSENLD. Fuzzy groups[J]. J Math Anal Appl, 1971(35):512-519.

[2] BISWAS R. Fuzzy subgroups and anti fuzzy subgroups[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990(35):121-125.

[3] 沈正维.一个群的反模糊子群[J].辽宁师范大学学报:自然科学版,1995,18(2):99-101.

[4] 王盛海.群 $G$ 的反模糊子群[J].模糊系统与数学,2005,19(2):58-60.

[5] 马骥良,于纯海. 模糊代数选论[M].北京:学苑出版社, 1989.

(编辑:陈丽萍)