第 43 卷 第 10 期 Vol.43 No.10
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2008 年 10 月 Oct. 2008

文章编号:1671-9352(2008)10-0067-04

$\mathscr{P}$-粗积分的生成及其特性

于秀清[1,2]

(1. 德州学院, 山东 德州 253000; 2. 山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:$\mathscr{P}$-粗积分是由函数双向 S-粗集生成的一个积分对,它是 F-粗积分与 $\bar{F}$-粗积分的推广。当有属性迁出同时又有属性迁入系统时,$\mathscr{P}$-粗积分发生变化,就具有了一系列动态特性。并且在不同的迁移族不断作用下生成 $\mathscr{P}$-粗积分链、$\mathscr{P}$-粗积分环及 $\mathscr{P}$-粗积分环链。

关键词:$\mathscr{P}$-粗积分;动态特征;$\mathscr{P}$-粗积分环

中图分类号:O159 **文献标志码:**A

The generation of $\mathscr{P}$-rough integrals and their characteristics

YU Xiu-qing[1,2]

(1. Dezhou College, Dezhou 253000, Shandong, China;
2. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: $\mathscr{P}$-rough integrals are one pair of integrals generated by function double direction S-rough sets. They can extend the study universe of F-rough integrals and $\bar{F}$-rough integrals. When there are some attributes moving in and out, $\mathscr{P}$-rough integrals changes and have a series of dynamic characteristics. They can generate a $\mathscr{P}$-rough integral chain, $\mathscr{P}$-rough integral ring and $\mathscr{P}$-rough integral ring chain.

Key words: $\mathscr{P}$-rough integrals; dynamic characteristics; $\mathscr{P}$-rough integral ring

0 引言

2005 年,山东大学史开泉教授改进了 S-粗集[1-2],提出了函数 S-粗集[3-4]理论,函数 S-粗集包括函数单向 S-粗集、函数双向 S-粗集和函数单向 S-粗集对偶。本文是在函数双向 S-粗集的基础上来研究的。

在函数双向 S- 粗集($(R,\mathscr{P})_\circ(Q^*)$,$(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*)$)中,令$[u]_-=(R,\mathscr{P})_\circ(Q^*)$,$[u]^-=(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*)$,若$[u]_-$和$[u]^-$生成的函数 $p_-(x)$ 和 $p^-(x)$ 在给定的区间$[a,b]$上连续,则可形成积分对($\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x$),即 $\mathscr{P}$-粗积分.事实上,通过元素迁移族 $\mathscr{P}=F\cup\bar{F}$ 的作用,函数双向 S- 粗集发生变化,从而使 $\mathscr{P}$- 粗积分具有了双向动态特征。这是一个新的研究领域,它扩展了 F- 粗积分与 $\bar{F}$- 粗积分的研究范围,使其应用更为广泛.本文所涉及到的 F- 粗积分和 $\bar{F}$- 粗积分的有关概念分别在文献[5]-[7]中给与了详细讨论。为了便于讨论,下文中所涉及到的函数均大于或等于 0。

约定:$\zeta(x)$ 是有限函数论域,$Q(x)=\{u_1(x),u_2(x),\cdots,u_\gamma(x)\}\subset\zeta(x)$ 是有限函数集,$[u(x)]$ 是 $\zeta(x)$ 上的 R- 函数等价类,R 是 $\zeta(x)$ 上的等价关系,ϑ 是属性论域,$\zeta(x)$、$Q(x)$、$u(x)$、$[u(x)]$ 分别记做 ζ、

收稿日期:2008-08-29
基金项目:山东自然科学基金资助项目(Y2007H02)
作者简介:于秀清(1968-),女,硕士研究生,研究方向为粗系统理论与应用.Email:sddzyxq@163.com

Q、u、$[u]$。且 $f \in F$、$\bar{f} \in \bar{F}$ 是元素迁移，$F = \{f_1, f_2, \cdots, f_\lambda\}$ 与 $\bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_\kappa\}$ 是元素迁移族。

1 函数双向 S- 粗集

定义 1.1 给定 $Q \subset \zeta$，称 Q^* 是 Q 的双向 S- 函数集合，如果

$$Q^* = Q' \cup \{v \mid v \in \zeta, v \overline{\in} Q, f(v) = u \in Q\}, \tag{1.1}$$

$$Q' = Q - \{u \mid u \in Q, \bar{f}(u) \overline{\in} Q\}。 \tag{1.2}$$

定义 1.2 称集合对$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$是$Q^* \subset \zeta$ 的函数双向 S- 粗集。其中 $\mathscr{P} = F \cup \bar{F}$，$F \neq \phi$，$\bar{F} \neq \phi$。

命题 1 当 $F \neq \phi$，$\bar{F} = \phi$，时，函数 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$变成函数单向 S- 粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$。

命题 2 当 $F = \phi$，$\bar{F} \neq \phi$ 时，函数 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$变成函数单向 S- 粗集对偶$((R,\bar{F})_\circ(Q'),(R,\bar{F})^\circ(Q'))$。

命题 3 当 $F = \bar{F} = \phi$ 时，函数 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$变成函数粗集$(R_-(Q), R^-(Q))$。

2 $\mathscr{P}$- 粗积分及其动态特性

定义 2.1 设$[u] = \{u_1, u_2, \cdots u_k, \cdots u_m\}$是函数论域 ζ 上的 R- 函数等价类，$\forall u_i \in [u]$具有离散分布数据点：$u_i = (u_i(1), u_i(2), \cdots u_i(k), \cdots u_i(n))$，$i = 1,2,\cdots,m$；$u_i(k) \geqslant 0$.将这 m 个数据点合成并生成数据点：

$$(1, y_1), (2, y_2), \cdots (k, y_k), \cdots, (n, y_n)。 \tag{2.1}$$

其中 $y_k = \sum_{i=1}^{m} u_i(k)$，$k = 1,2,\cdots,n$.由数据点(2.1)生成的多项式

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2.2}$$

称作 R- 函数等价类$[u]$生成的函数。

定义 2.2 称积分$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$ 是函数双向 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$生成的下近似积分。其中 $p_-(x)$ 是由函数等价类$[u]_- = (R,\mathscr{P})_\circ(Q^*)$根据定义 2.1 生成的函数。

定义 2.3 称积分$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x$ 是函数双向 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$生成的上近似积分。其中 $p^-(x)$ 是由函数等价类$[u]^- = (R,\mathscr{P})^\circ(Q^*)$根据定义 2.1 生成的函数。

定义 2.4 称积分对$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$是函数双向 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$生成的 $\mathscr{P}$- 粗积分，简称 $\mathscr{P}$- 粗积分。

其中$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x$ 分别是函数双向 S- 粗集$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*),(R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$生成的下近似积分和上近似积分。

命题 4 当 $F \neq \phi$，$\bar{F} = \phi$，时，$\mathscr{P}$- 粗积分变成了 F- 粗积分。

命题 5 当 $F = \phi$，$\bar{F} \neq \phi$ 时，$\mathscr{P}$- 粗积分变成了 $\bar{F}$- 粗积分。

命题 6 当 $F = \bar{F} = \phi$ 时，$\mathscr{P}$- 粗积分变成了函数粗积分。

定理 2.1 $\mathscr{P}$- 粗积分$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$的上近似积分与下近似积分满足

$$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x。 \tag{2.3}$$

证明　在函数双向S-粗集$((R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*}),(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*}))$中有$(R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*})\subseteq(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*})$,即$[u]_{-}\subseteq[u]^{-}$,根据定义2.1知$[u]_{-}$,$[u]^{-}$生成的函数$p_{-}(x)$,$p^{-}(x)$具有关系$0\leqslant p_{-}(x)\leqslant p^{-}(x)$,从而有$\int_{a}^{b}p_{-}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{a}^{b}p^{-}(x)\mathrm{d}x$。

定理2.2　若存在2个函数双向S-粗集$((R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*}),(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*}))$与$((R,\mathscr{P}')_{\circ}(Q'^{*}),(R,\mathscr{P}')^{\circ}(Q'^{*}))$,当$((R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*}),(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*}))\subseteq((R,\mathscr{P}')_{\circ}(Q'^{*}),(R,\mathscr{P}')^{\circ}(Q'^{*}))$时,有

$$(\int_{a}^{b}p_{-}(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p^{-}(x)\mathrm{d}x)\leqslant(\int_{a}^{b}p'_{-}(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p'^{-}(x)\mathrm{d}x)。\tag{2.4}$$

其中$(\int_{a}^{b}p_{-}(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p^{-}(x)\mathrm{d}x)$,$(\int_{a}^{b}p'_{-}(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p'^{-}(x)\mathrm{d}x)$分别是$((R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*}),(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*}))$与$((R,\mathscr{P}')_{\circ}(Q'^{*}),(R,\mathscr{P}')^{\circ}(Q'^{*}))$生成的$\mathscr{P}$-粗积分。

显然当函数双向S-粗集有一部分属性迁出,同时又将这部分属性迁入时,函数双向S-粗集只具有了动态变化过程,其前后生成的$\mathscr{P}$-粗积分是相同的,从而有下面定理与推论成立。

定理2.3　设α_{-}是函数双向S-粗集下近似$[u]_{-}=(R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*})$的属性集,且存在元素迁移族$f\in F$和$\bar{f}\in\bar{F}$使得$\alpha_{\mathscr{P}'}=\alpha_{-}\cup\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha_{-},f(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha_{-}\}-\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha_{-},\bar{f}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha_{-}\}$,$[u]_{\mathscr{P}'}=(R,\mathscr{P}')_{\circ}(Q^{\mathscr{P}'})$是具有属性集$\alpha_{\mathscr{P}'}$的函数等价类,当且仅当$\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha_{-},f(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha_{-}\}=\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha_{-},\bar{f}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha_{-}\}$时,有

$$\mathrm{IND}\{\int_{a}^{b}p_{-}(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p_{\mathscr{P}'}(x)\mathrm{d}x\}。\tag{2.5}$$

其中$p_{-}(x)$,$p_{\mathscr{P}'}(x)$分别是$[u]_{-}$,$[u]_{\mathscr{P}'}$根据定义2.1生成的函数,$\mathscr{P}'=f\cup\bar{f}$,$i$,$r$均是正整数。

推论1　设α_{-}是函数双向S-粗集下近似$[u]_{-}=(R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{*})$的属性集,且存在元素迁移族$f_{j}\in F$和$\overline{f_{l}}\in\bar{F}$使得$\alpha_{\mathscr{P}}=\alpha_{-}\cup\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha_{-},f_{j}(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha_{-}\}-\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha_{-},\overline{f_{l}}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha_{-}\}$,$[u]_{\mathscr{P}}=(R,\mathscr{P})_{\circ}(Q^{\mathscr{P}})$是具有属性集$\alpha_{\mathscr{P}}$的函数等价类,当且仅当$\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha_{-},f_{j}(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha_{-}\}=\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha_{-},\overline{f_{l}}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha_{-}\}$时,有

$$\mathrm{IND}\{\int_{a}^{b}p_{-}(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p_{\mathscr{P}}(x)\mathrm{d}x\}。\tag{2.6}$$

其中$p_{-}(x)$,$p_{\mathscr{P}}(x)$分别是$[u]_{-}$,$[u]_{\mathscr{P}}$根据定义2.1生成的函数,$\mathscr{P}=F\cup\bar{F}$,i,j,r,l均是正整数。

定理2.4　设α^{-}是函数双向S-粗集上近似$[u]^{-}=(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*})$的属性集,且存在元素迁移族$f\in F$和$\bar{f}\in\bar{F}$使得$\alpha^{\mathscr{P}'}=\alpha^{-}\cup\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha^{-},f(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha^{-}\}-\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha^{-},\bar{f}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha^{-}\}$,$[u]^{\mathscr{P}'}=(R,\mathscr{P}')^{\circ}(Q^{\mathscr{P}'})$是具有属性$\alpha^{\mathscr{P}'}$的函数等价类,当且仅当$\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha^{-},f(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha^{-}\}=\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha^{-},\bar{f}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha^{-}\}$时,有

$$\mathrm{IND}\{\int_{a}^{b}p(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p^{\mathscr{P}'}(x)\mathrm{d}x\}。\tag{2.7}$$

其中$p^{-}(x)$,$p^{\mathscr{P}'}(x)$分别是$[u]^{-}$,$[u]^{\mathscr{P}'}$根据定义2.1生成的函数,$\mathscr{P}'=f\cup\bar{f}$,$i$,$r$均是正整数。

推论2　设α^{-}是函数双向S-粗集上近似$[u]^{-}=(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{*})$的属性集,且存在元素迁移族$f_{j}\in F$和$\bar{f}_{l}\in\bar{F}$使得$\alpha^{\mathscr{P}}=\alpha^{-}\cup\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha^{-},f_{j}(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha^{-}\}-\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha^{-},\overline{f_{l}}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha^{-}\}$,$[u]^{\mathscr{P}}=(R,\mathscr{P})^{\circ}(Q^{\mathscr{P}})$是具有属性$\alpha^{\mathscr{P}}$的函数等价类,当且仅当$\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha^{-},f_{j}(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha^{-}\}=\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha^{-},\overline{f_{l}}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha^{-}\}$时,有

$$\mathrm{IND}\{\int_{a}^{b}p(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{b}p^{\mathscr{P}}(x)\mathrm{d}x\}。\tag{2.8}$$

其中$p^{-}(x)$,$p^{\mathscr{P}}(x)$分别是$[u]^{-}$,$[u]^{\mathscr{P}}$根据定义2.1生成的函数,$\mathscr{P}=F\cup\bar{F}$,i,j,r,l均是正整数。

定理2.5　设α_{-},α^{-}分别是函数双向S-粗集下近似$[u]_{-}$与上近似$[u]^{-}$的属性集,若存在$f\in F$和$\bar{f}\in\bar{F}$使得$\alpha_{\mathscr{P}'}=\alpha_{-}\cup\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha_{-},f(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha_{-}\}-\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha_{-},\bar{f}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha_{-}\}$,$\alpha^{\mathscr{P}'}=\alpha^{-}\cup\{\alpha_{i}\mid\beta_{i}\in\vartheta,\beta_{i}\overline{\in}\alpha^{-},f(\beta_{i})=\alpha_{i}\in\alpha^{-}\}-\{\alpha_{r}\mid\alpha_{r}\in\alpha^{-},\bar{f}(\alpha_{r})=\beta_{r}\overline{\in}\alpha^{-}\}$,函数双向S-粗集$([u]_{\mathscr{P}'}$,

$[u]^{\mathscr{P}'}$,的下近似与上近似分别具有属性 $\alpha_{\mathscr{P}'}$ 与 $\alpha^{\mathscr{P}'}$。当且仅当 $\{\alpha_i \mid \beta_i \in \vartheta, \beta_i \overline{\in} \alpha^-, f(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha^-\} = \{\alpha_r \mid \alpha_r \in \alpha^-, \bar{f}(\alpha_r) = \beta_i \overline{\in} \alpha^-\}$ 与 $\{\alpha_i \mid \beta_i \in \vartheta, \beta_i \overline{\in} \alpha_-, f(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha_-\} = \{\alpha_r \mid \alpha_r \in \alpha_-, \bar{f}(\alpha_r) = \beta_r \overline{\in} \alpha_-\}$ 同时成立时,有

$$\mathrm{IND}\{(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x), (\int_a^b p_{\mathscr{P}'}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}'}(x)\mathrm{d}x)\}。\tag{2.9}$$

其中 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x), (\int_a^b p_{\mathscr{P}'}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}'}(x)\mathrm{d}x)$ 分别是函数双向 S- 粗集 $([u]_-, [u]^-)$ 与 $([u]_{\mathscr{P}'}, [u]^{\mathscr{P}'})$ 生成的 $\mathscr{P}'$- 粗积分,$\mathscr{P}' = f \cup \bar{f}$, i, r 均是正整数。

推论 3　设 α_-, α^- 分别是函数双向 S- 粗集下近似 $[u]_-$ 与上近似 $[u]^-$ 的属性集,若存在 $f_j \in F$ 和 $\bar{f}_l \in \bar{F}$ 使得 $\alpha_{\mathscr{P}} = \alpha_- \cup \{\alpha_i \mid \beta_i \in \vartheta, \beta_i \overline{\in} \alpha_-, f_j(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha_-\} - \{\alpha_r \mid \alpha_r \in \alpha_-, \overline{f_l}(\alpha_r) = \beta_r \overline{\in} \alpha_-\}$, $\alpha^{\mathscr{P}} = \alpha^- \cup \{\alpha_i \mid \beta_i \in \vartheta, \beta_i \overline{\in} \alpha^-, f_j(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha^-\} - \{\alpha_r \mid \alpha_r \in \alpha^-, \overline{f_l}(\alpha_r) = \beta_r \overline{\in} \alpha^-\}$,函数双向 S- 粗集 $([u]_{\mathscr{P}}, [u]^{\mathscr{P}})$ 的下近似与上近似分别具有属性 $\alpha_{\mathscr{P}}$ 与 $\alpha^{\mathscr{P}}$。当且仅当 $\{\alpha_i \mid \beta_i \in \vartheta, \beta_i \overline{\in} \alpha_-, f_j(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha_-\} = \{\alpha_r \mid \alpha_r \in \alpha_-, \overline{f_l}(\alpha_r) = \beta_r \overline{\in} \alpha_-\}$ 与 $\{\alpha_i \mid \beta_i \in \vartheta, \beta_i \overline{\in} \alpha^-, f_j(\beta_i) = \alpha_i \in \alpha^-\} = \{\alpha_r \mid \alpha_r \in \alpha^-, \overline{f_l}(\alpha_r) = \beta_r \overline{\in} \alpha^-\}$ 同时成立时,有

$$\mathrm{IND}\{(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x), (\int_a^b p_{\mathscr{P}}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}}(x)\mathrm{d}x)\}。\tag{2.10}$$

其中 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x), (\int_a^b p_{\mathscr{P}}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}}(x)\mathrm{d}x)$ 分别是函数双向 S- 粗集 $([u]_-, [u]^-)$ 与 $([u]_{\mathscr{P}}, [u]^{\mathscr{P}})$ 生成的 $\mathscr{P}$- 粗积分,$\mathscr{P} = F \cup \bar{F}$, i, j, r, l 均是正整数。

3　$\mathscr{P}$- 粗积分链

定义 3.1　称在迁移族 $\mathscr{P}_i (i = 0,1,2,\cdots,p)$ 的作用下由 $\mathscr{P}$- 粗积分 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$ 生成的 $(\int_a^b p_{\mathscr{P}_i}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}_i}(x)\mathrm{d}x)$ 链是 $\mathscr{P}$- 粗积分链,可以用 Ω 来表示。其中 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$ 是由函数双向 S- 粗集 $((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*), (R,\mathscr{P})^\circ(Q^*))$ 生成的 $\mathscr{P}$- 粗积分;$(\int_a^b p_{\mathscr{P}_i}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}_i}(x)\mathrm{d}x)$, $i = 0,1,2,\cdots,p$ 是由函数双向 S- 粗集 $((R,\mathscr{P}_i)_\circ(Q^i), (R,\mathscr{P}_i)^\circ(Q^i))$ 生成的 $\mathscr{P}_i$- 粗积分;$((R,\mathscr{P}_i)_\circ(Q^i), (R,\mathscr{P}_i)^\circ(Q^i))$ 是 $((R,\mathscr{P}_{i-1})_\circ(Q^{i-1}), (R,\mathscr{P}_{i-1})^\circ(Q^{i-1}))$ 通过元素迁移族 $\mathscr{P}_i = F_i \cup \overline{F_i}$ 的作用生成的函数双向 S- 粗集,$i = 1,2,\cdots,p$;$((R,\mathscr{P})_\circ(Q^*), (R,\mathscr{P})^\circ(Q^*)) = ((R,\mathscr{P}_0)_\circ(Q^0), (R,\mathscr{P}_0)^\circ(Q^0))$。

定义 3.2　称 $\mathscr{P}$- 粗积分链中 $\mathscr{P}_i$- 粗积分 $(\int_a^b p_{\mathscr{P}_i}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{\mathscr{P}_i}(x)\mathrm{d}x)$, $i = 0,1,2,\cdots,p$ 是 $\mathscr{P}$- 粗积分链的第 i 个链结点。

定理 3.1　在同一粗积分生成的2个链中,若链结数不等,则2链可分辨;若2个链结数相等,且对应链结点相同,则 2 链不可分辨;若 2 个链结数相等,且至少有一对对应链结不等,则 2 链可分辨。

定理 3.2　设 Ω_1、Ω_2 是 $\mathscr{P}$- 粗积分 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$ 生成的 2 个 $\mathscr{P}$- 粗积分链,$\mathscr{P}_i = F_i \cup \overline{F_i} (i = 1,2,\cdots,p)$, $\mathscr{P}'_j = F'_j \cup \overline{F'_j} (j = 1,2,\cdots,q)$ 分别是2个 $\mathscr{P}$- 粗积分链的属性迁移族,如果 Ω_1, Ω_2 中存在共同的链结点(第 0 个链结点除外),Ω_1, Ω_2 就可以构成 $\mathscr{P}$- 粗积分环;如果 Ω_1, Ω_2 中存在 2 个以上的共同的链结点,Ω_1, Ω_2 就可以构成一个 $\mathscr{P}$- 粗积分环链。

定理 3.3　$\mathscr{P}$- 粗积分 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$ 生成的任意 2 个 $\mathscr{P}$- 粗积分链 Ω_1, Ω_2 生成有限个 $\mathscr{P}$- 粗积分环。

定理 3.4　设 Ω_1, Ω_2 是 $\mathscr{P}$- 粗积分 $(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$ 生成的 2 个 $\mathscr{P}$- 粗积分链,当 Ω_1, Ω_2 只有首尾链结点相同时,2 个粗积分链生成最大 $\mathscr{P}$- 粗积分环。

（下转第 76 页）

(上接第 70 页)

定理 3.1 ~ 3.4 的证明可由 $\mathscr{P}$-粗积分的生成过程与推论3直接得出,证明略。

4 结语

函数双向 S-粗集生成的 $\mathscr{P}$-粗积分是一个积分对,它是 F-粗积分与 $\bar{F}$-粗积分的扩展。$\mathscr{P}$-粗积分不仅具有动态特性,而且克服了 F-粗积分与 $\bar{F}$-粗积分单向变化趋势,从有属性迁入同时也有属性迁出双向的角度来探讨问题,拓宽了粗系统的研究范围。

参考文献:

[1] SHI Kaiquan, ZHANG Tingcheng. One direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2):319-334.

[2] SHI Kai-quan. Two directions S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2):335-349.

[3] 史开泉,姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识[J].中国科学:E,2008,38(4):553-564.

[4] SHI Kai-quan, ZHAO Jian-li. Function S-rough sets and security-authentication of hiding law[J]. Science in China: F, 2008, 51(7): 924-935.

[5] 于秀清,史开泉.函数单向 S-粗集生成的 F-粗积分[J].山东大学学报:理学版,2008,43(2):29-34.

[6] 于秀清,任雪芳. F-粗积分的度量与药效识别[J]. 山东大学学报:理学版,2008,43(2):29-34.

[7] 于秀清,史开泉.函数单向 S-粗集对偶生成的 $\bar{F}$-粗积分[J].聊城大学学报:自然科学版,2007,20(4):15-19.

(编辑:孙培芹)