文章编号:1671-9352(2008)09-0081-04

含 Hardy 位势的双调和方程特征值问题

伍芸[1],姚仰新[2],柯敏[2]

(1. 贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵州 贵阳 550001; 2. 华南理工大学数学科学学院, 广东 广州 510640)

摘要:对于一类包含 Hardy 位势 $1/|x|^4$ ($N\geqslant 5$) 的双调和方程的特征值问题,通过建立一个新空间和一个 Hardy-Rellich 不等式证明该特征值 问题的解的存在性。

关键词:特征值问题;双调和方程;Hardy 位势

中图分类号:O175.25　　**文献标志码**:A

Eigenvalue problems of bi-harmonic equations with Hardy potential

WU Yun[1], YAO Yang-xin[2], KE Min[2]

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, Guizhou, China;
2. School of Mathematical Sciences, South China University of Technology, Guangzhou 510640, Guangdong, China)

Abstract: The eigenvalue problem of bi-harmonic equations with Hardy potential $1/|x|^4$ ($N\geqslant 5$) was investigated based on an establishment of a new space and a Hardy-Rellich inequality. Furthermore, the results show the solvability of these problems in the new space.

Key words: eigenvalue problem; bi-harmonic equation; Hardy potential

0 引言

2004 年 F. Gazzola, H.F.Grunau, E. Mitidieri[1] 证明 Hardy-Rellich 不等式: 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ ($N\geqslant 5$) 是有界区域, $0\in\Omega$, 则存在 $C>0$,使得当 $u\in H_0^2(\Omega)$时,

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x - \left[\frac{N(N-4)}{4}\right]^2\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x \geqslant C\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x + C_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

设 λ^* 表示最佳常数:

$$\lambda^* = \inf_{u\in H_0^2(\Omega)}\left\{\int_\Omega |\Delta u|^2\mathrm{d}x - \left[\frac{N(N-4)}{4}\right]^2\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x \,\middle|\, \int_\Omega u^2\mathrm{d}x = 1\right\} \tag{2}$$

其最佳常数 λ^* 是不可达的。也就是说,特征值问题:

$$\begin{cases}\Delta^2 u - \left[\dfrac{N(N-4)}{4}\right]^2\dfrac{u}{|x|^4} = \lambda u & x\in\Omega\\ u>0 & x\in\Omega\\ u\in H_0^2(\Omega)\end{cases} \tag{3}$$

当 $\lambda=\lambda^*$ 时(0.3) 无解。

2006 年,Adimurthi, N. Chaudhuri and M. Ramaswamy, S. Santra[2] 考虑了如下摄动问题:

收稿时间:2008-03-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771074)

作者简介:伍芸(1973-),女,讲师,研究方向为非线性椭圆型方程.Email: wuyun73224@163.com

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\left[\dfrac{N(N-4)}{4}\right]^2\dfrac{q(x)u}{|x|^4}=\lambda u & x\in\Omega\\ u>0 & x\in\Omega\\ u\in H_0^2(\Omega)\end{cases}\tag{4}$$

其中 $0\leqslant q(x)\leqslant 1$。定义

$$\lambda(q)=\inf_{u\in H_0^2(\Omega)}\left\{\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x-\left[\frac{N(N-4)}{4}\right]^2\int_\Omega\frac{q(x)u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\,\middle|\,\int_\Omega u^2\mathrm{d}x=1\right\}$$

在文献[2]中证明：

（ⅰ）如果

$$\lim_{x\to0}\inf(\ln 1/|x|)^2(1-q(x))>\frac{6(N^2-4N+8)}{N^2(N-4)^2}\tag{5}$$

当 $\lambda=\lambda(q)$ 时,则问题(4)有一个解。

（ⅱ）如果存在 $R>0$,使得

$$\sup_{0<|x|\leqslant R}(\ln 1/|x|)^2(1-q(x))\leqslant\frac{6(N^2-4N+8)}{N^2(N-4)^2}\tag{6}$$

对任给的 $\lambda\in\mathbf{R}$,则问题(4)都无解。

建立一个新的Hilbert空间中讨论特征问题(4),通过改进条件(5)，得到问题(4)在新的Hilbert空间中有解。

将 $H_0^2(\Omega)$ 空间按下列范数

$$\|u\|_H=\int_\Omega\left(|\Delta u|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{|u|^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x$$

的完备化空间，记为 H。H 按内积

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega\left(\Delta u\Delta v-\left[\frac{N(N-4)}{4}\right]^2\frac{uv}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x$$

仍然是 Hilbert 空间。H 嵌入 $W_0^{2,p}(\Omega)$,其中 $1\leqslant p\leqslant 2$。因此,H 紧嵌入到 $L^2(\Omega)$ 中。

在 H 中讨论问题(4)对应的问题：

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\left[\dfrac{N(N-4)}{4}\right]^2\dfrac{q(x)u}{|x|^4}=\lambda\eta(x)u & x\in\Omega\\ u>0 & x\in\Omega\\ u\in H\end{cases}\tag{7}$$

为此,在 H 中引进新的内积

$$\langle u,v\rangle_{1,q}=\int_\Omega\left(\Delta u\Delta v-\left[\frac{N(N-4)}{4}\right]^2\frac{q(x)uv}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x\tag{8}$$

于是,若记 $\|u\|_{1,q}=\langle u,u\rangle_{1,q}$,则当 $u\in H$ 时,

$$\|u\|_H^2\leqslant\|u\|_{1,q}\leqslant\|u\|_{H_0^2(\Omega)}\tag{9}$$

设 $\eta\geqslant0,\eta\in L^\infty(\Omega\setminus B_r(0)),\forall r>0$,且

$$\lim_{x\to0}\sup|x|^4(\ln 1/|x|)^2\eta(x)=0,\tag{10}$$

定义含权的 $L^2(\Omega)$ 空间 $L_\eta^2(\Omega)$ 的范数为

$$|u|_{2,\eta}=\left(\int_\Omega\eta(x)u^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\tag{11}$$

其中 η 满足条件(0.10)。将前述 $\lambda(q)$ 重新定义为

$$\lambda(q)=\inf_{u\in H}\frac{\|u\|_{1,q}^2}{|u|_{2,\eta}^2}\tag{12}$$

有

定理 0.1　设 $N\geqslant5$,$\eta(x)$ 满足(0.10),$0\leqslant q(x)\leqslant1$。则当 $\lambda=\lambda(q)$ 时,特征问题(0.7)有一个解。

1　引理

引理 1.1　设 $0 \in \Omega$, $N \geqslant 5$, $R \geqslant \mathrm{e} \sup\limits_{x \in \Omega} |x|$, 则当 $u \in H_0^2(\Omega)$ 时,

$$\frac{N(N-4)}{8}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4 \ln^2 R/|x|}\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - \frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{|u|^2}{|x|^4}\right) \tag{1.1}$$

证明　对 $\forall u$, 设 u^* 是 u 的 Schwarz 对称。由[3],有:

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u^*|^2 \leqslant \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \text{ 和} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|u^*|^2}{|x|^\alpha} \geqslant \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^\alpha} \quad \alpha \in [0,4]$$

根据这两个不等式,讨论径对称函数[4]:

设 $u(r) \in C^1[0,1], u(1) = 0, r \in [0,1]$, 定义 $u(r) = r^{\frac{4-N}{2}} v(r)$ 和 $v(r) \in C^1[0,1]$。因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |u'(r)|^2 r^{N-3}\mathrm{d}r = {} & \left(\frac{N-4}{2}\right)^2 \int_0^1 |v(r)^2 r^{-1}|\mathrm{d}r + \int_0^1 |v'(r)|^2 r\mathrm{d}r + (4-N)\int_0^1 v(r)v'(r)\mathrm{d}r = \\
& \left(\frac{N-4}{2}\right)^2 \int_0^1 |v(r)|^2 r^{-1}\mathrm{d}r + \int_0^1 |v'(r)|^2 r\mathrm{d}r = \\
& \left(\frac{N-4}{2}\right)^2 \int_0^1 \frac{|u(r)|^2 r^{N-1}}{r^4}\mathrm{d}r + \int_0^1 |v'(r)|^2 r\mathrm{d}r。
\end{aligned} \tag{1.2}$$

再令 $v(r) = \left(|\ln\frac{R}{r}|\right)^{\frac{1}{2}} w(r)$, 其中 $w(r) \in C^1[0,1]$ 和 $r \in [0,1]$ 有:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |v'(r)|^2 r\mathrm{d}r = {} & \int_0^1 |w'(r)|^2 r|\ln\frac{R}{r}|\mathrm{d}r + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|w(r)|^2}{r|\ln\frac{R}{r}|}\mathrm{d}r - \int_0^1 w'(r)w(r)\mathrm{d}r \geqslant \\
& \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|w(r)|^2}{r|\ln\frac{R}{r}|}\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|v(r)|^2}{r|\ln\frac{R}{r}|^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|u(r)|^2}{r^{5-N}|\ln\frac{R}{r}|^2}\mathrm{d}r。
\end{aligned} \tag{1.3}$$

由(1.2) 和(1.3),有:

$$\int_0^1 \frac{|u'(r)|^2 r^{N-1}}{r^2}\mathrm{d}r \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|u(r)|^2 r^{N-1}}{r^4 \ln|R/r|^2}\mathrm{d}r + \left(\frac{N-4}{2}\right)^2 \int_0^1 \frac{|u(r)|^2 r^{N-1}}{r^4}\mathrm{d}r$$

故

$$\frac{1}{4}\int_{B_r(0)} \frac{|u(x)|^2}{|x|^4 \ln^2 |R/x|} + \left(\frac{N-4}{2}\right)^2 \int_{B_r(0)} \frac{|u(x)|^2}{|x|^4} \leqslant \int_{B_r(0)} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^2}$$

应用对称化原理, 对于 $\forall u \in H_0^2(\Omega)$ 及一般的 Ω,有

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4 \ln^2 |R/x|} + \left(\frac{N-4}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} \leqslant \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} \tag{1.4}$$

由恒等式:

$$(N-4)\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} = -\int_\Omega \frac{u\Delta u}{|x|^2} \tag{1.5}$$

(1.4) + (1.5) 得:

$$\left(\frac{N(N-4)}{4}\right)\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} + \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4 \ln^2 |R/x|} \leqslant -\int_\Omega \frac{u\Delta u}{|x|^2}$$

对 $\forall \varepsilon > 0$,有 Young 不等式, 有

$$\left(\frac{N(N-4)}{4}\right)\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} + \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4 \ln^2 |R/x|} \leqslant \varepsilon\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |\Delta u|^2$$

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} + \frac{1}{N(N-4)-4\varepsilon}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4 \ln^2 |R/x|} \leqslant \frac{1}{\left[\frac{N(N-4)}{4} - \varepsilon\right]4\varepsilon}\int_\Omega |\Delta u|^2$$

取 $\varepsilon = \dfrac{N(N-4)}{8}$,则:

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} + \frac{2}{N(N-4)}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4 \ln^2 |R/x|} \leqslant \left[\frac{4}{N(N-4)}\right]^2 \int_\Omega |\Delta u|^2$$

引理 2[2] 设 $N \geqslant 5$，则存在常数 $C > 0$，使得当 $1 \leqslant p < 2$，$u \in H$ 时，

$$C \| u \|^2_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leqslant \int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - \frac{N^2(N-4)^2}{16} \frac{|u|^2}{|x|^4} \right) \tag{1.6}$$

2 定理的证明

对于问题(0.12)，取极小化序列 $u_m \in H$，$|u_m|^2_{2,\eta} = 1$，且 $\| u_m^2 \|_{1,q} \to \lambda(q)$。于是，由(0.9) 知 $\| u_m \|_H \leqslant C$。故存在 $u \in H$，使得$\{u_m\}$在 H 中弱收敛于 u。再由引理 1.2 知，H 嵌入 $L^2(\Omega)$ 是紧的，故$\{u_m\}$在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 u。于是，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_0 > 0$，使得当 $m, l > N_0$ 时，

$$\int_\Omega |u_m - u_l|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon \tag{2.1}$$

由(0.10)，对上述 ε，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in B_\delta(0)$ 时，

$$|\eta(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{|x|^4 \ln^2 R/|x|} \tag{2.2}$$

于是，由引理 1.1，得

$$\int_{B_\delta(0)} \eta |u_m - u_l|^2 \leqslant \varepsilon \int_{B_\delta(0)} \frac{|m_m - u_l|^2}{|x|^4 \ln^2 R/|x|} \leqslant \varepsilon \int_\Omega \frac{|u_m - u_l|^2}{|x|^4 \ln^2 R/|x|} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\frac{8\varepsilon}{N(N-4)} \int_\Omega \left(|\Delta u_m - u_l|^2 - \frac{N^2(N-4)^2}{16} \frac{|u_m - u_l|^2}{|x|^4} \right) \leqslant C\varepsilon$$

同时，$\eta \in L^\infty(\Omega \setminus B_\delta(0))$，故

$$\int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} \eta |u_m - u_l|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |u_m - u_l|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\varepsilon$$

因此，

$$|u_m - u_l|_{2,\eta} = \int_{B_\delta(0)} \eta |u_m - u_l|^2 + \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} \eta |u_m - u_l|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\varepsilon$$

即$\{u_m\}$在 $L^2_\eta(\Omega)$ 中强收敛于 u。因此，$\int_\Omega \eta u^2 \mathrm{d}x = 1$。

对任给的 m，l，由(0.12)，有

$$\left\| \frac{u_m - u_l}{2} \right\|^2_{1,q} = \frac{1}{2}(\| u_m \|^2_{1,q} + \| u_l \|^2_{1,q}) - \left\| \frac{u_m + u_l}{2} \right\|^2_{1,q} \leqslant$$
$$\frac{1}{2}(\| u_m \|^2_{1,q} + \| u_l \|^2_{1,q}) - \lambda(q) \left| \frac{u_m + u_l}{2} \right|^2_{2,\eta} \to$$
$$\lambda(q) - \lambda(q) = 0$$

再由(0.9)，知 $$\| u_m - u_l \|^2_H \leqslant \| u_m - u_l \|^2_{1,q}$$

因此$\{u_m\}$在 H 中强收敛于 u，证毕。

参考文献：

[1] GAZZOLA F, GRUNAU H F, MITIDIERI E. Hardy inequalities with optimal constants and remainders[J]. Trans Amer Math Soc, 2004, 6:2168-2419.

[2] ADIMURTHI A, CHAUDHURI N, RAMASWAMY M, et al. Optimal Hardy-Rellich inequalities, maximum principle and related eigenvalue problem its applications[J]. Journal of Functional Analysis, 240(2006),36-83.

[3] ALMGREN F, LIEB E. Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous[J]. J Amer Math Soc, 1989, 2:683-773.

[4] YAO Yangxin, SHEN Yaotian. Biharmonic equation and an improved hardy inequality[J]. Acta Math Appl Sinica, 2004, 20(3):433-440.

(编辑：胡春霞)