文章编号:1671-9352(2008)08-0028-03

环同态上的 co- $*^n$-模

邢建民
(青岛科技大学数理学院，山东 青岛 266061)

摘要:定义了 co- $*^n$-模,对于给定的两个同态的环 A 和 R，找到了左 A-co- $*^n$-模${}_AU$ 提升到左 R-co- $*^n$-模 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_{R,A}U)$)的条件。

关键词:co- $*^n$-模;同态;n-余表示
中图分类号:O153.5 **文献标志码**:A

Co- $*^n$-module over ring homomorphism

XING Jian-min
(College of Mathematic and Physics of Qingdao University of Science and Technology，Qingdao 266061，Shandong，China)

Abstract: A co- $*^n$-module was defined. The conditions under which a left co- $*^n$-module ${}_AU$ lifts to a left R co- $*^n$-module $\mathrm{Hom}_A({}_AR_{R,A}U)$ over a ring homomorphism between ring A and R were given.

Key words: co- $*^n$-module; homonorphism; n-copresented

0 引言

倾斜理论在上世纪八十年代由 Brenner 和 Butler[1]，Happel 和 Ringel[2] 等在研究 Artin 代数的有限生成模时提出。因此在代数表示论的发展中起到了重要的作用。并由此衍生出了 wakamatsu tilting 模，$*$-模，和 $*^n$-模。在文献[3]中魏加群定义了 n-star 模,并在[4]中讨论了环扩张上的 n-star 模,找到了两个具有环扩张性质的环上的 n-star 环的关系。作为这一问题的推广，本文定义了 co- $*^n$-模,并找到了两个同态环上的 co- $*^n$-模之间的关系。从而丰富了倾斜理论。

设 A 是环,${}_AU$ 是左 A-模。定义 Prod_AU 是与 U 的直积的直和项同构的模类。定义 Copres_A^nU 为由${}_AU$ n-余表示的模类。即存在正合列 $0\longrightarrow M\longrightarrow U_1\longrightarrow\cdots\longrightarrow U_n$。其中每个 $U_i\in\mathrm{Prod}_AU$。显然 Copres_A^nU 关于直积闭的。注意到 $\mathrm{Copres}_A^{n+1}U\subseteq\mathrm{Copres}_A^nU$ 和 $\mathrm{Copres}_A^1U=\mathrm{Cogen}_AU$。为了方便定义 Copres_A^0U 为所有的左 A-模类。

定义 0.1 设 A 是环,左 A-模${}_AU$ 称为 co- $*^n$-模，若对任意正合列 $0\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow L\longrightarrow 0$,${}_AL\in\mathrm{Copres}_A^nU$ 当且仅当此正合列在 $\mathrm{Hom}_A(-,{}_AU)$作用下保持正合,其中${}_AM$,${}_AN\in\mathrm{Copres}_A^nU$。

左 A-模类 $\mathscr{C}$称为关于 n-kenel 闭的,若对任意左 A-模正合列 $0\longrightarrow M\longrightarrow C_1\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_n$ 都有 $M\in\mathscr{C}$,其中 $C_i\in\mathscr{C}$。显然 Copres_A^1U 是关于 1-kenel 闭的。下面的引理证明了当${}_AU$ 是 co- $*^n$-模时,Copres_A^nU 关于 n-kernel 闭。

引理 0.1 设 A 是环,${}_AU$ 是左 A-co- $*^n$-模。则对任意 $k\geqslant 1$，都满足 $\mathrm{Copres}_A^k(\mathrm{Copres}_A^nU)=\mathrm{Copres}_A^kU$。其中 $\mathrm{Copres}_A^k(\mathrm{Copres}_A^nU)$定义为所有满足存在正合列$0\longrightarrow M\longrightarrow C_1\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_n$ 的模M 的类，其中 $C_i\in$

收稿日期:2008-04-18
基金项目:青岛科技大学科研启动基金资助项目(0022313)
作者简介:邢建民(1978-),男,讲师,博士，研究方向为代数学.Email: xingjianmin1978@163.com

$\mathrm{Copres}_A^n U$。特别的 $\mathrm{Copres}_A^n U$ 关于 n-kenel 和直和像闭。

证明 $\mathrm{Copres}_A^k U \subseteq \mathrm{Copres}_A^k(\mathrm{Copres}_A^n U)$显然。只需证 $\mathrm{Copres}_A^k(\mathrm{Copres}_A^n U) \subseteq \mathrm{Copres}_A^k U$。对 k 归纳。

当 $k=1$ 时显然成立。假设对任意 $1 \leqslant j \leqslant k$, $\mathrm{Copres}_A^j(\mathrm{Copres}_A^n U) \subseteq \mathrm{Copres}_A^j U$。设$_AM$ 满足正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{k+1}$，其中 $C_i \in \mathrm{Copres}_A^n U$。定义$_AM_1 = \mathrm{coker}\, i$，则存在正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} C_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$。由归纳假设，$M_1 \in \mathrm{Copres}_A^k(\mathrm{Copres}_A^n U) = \mathrm{Copres}_A^k U$。因此有正合列 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} U_1 \longrightarrow M'_1 \longrightarrow 0$，其中 $U_1 \in \mathrm{Prod}_A U$, $M'_1 \in \mathrm{Copres}_A^{k-1} U$。因为 $C_1 \in \mathrm{Copres}_A^n U$ 且$_AU$ 是左 A-co-$*^n$-模，则存在正合列 $0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\beta} U'_1 \longrightarrow C'_1 \longrightarrow 0$，其中 $U'_1 \in \mathrm{Prod}_A U$, $C'_1 \in \mathrm{Copres}_A^n U$。构造下列正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta i"] & C_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\beta,\alpha\pi)"] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U'_1 \arrow[r, "(1,0)"] \arrow[d] & U'_1 \oplus U_1 \arrow[r] \arrow[d] & U_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & M'_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为$_AU$ 是左 A-co-$*^n$-模，则正合列 $0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\beta} U'_1 \longrightarrow C'_1 \longrightarrow 0$ 在 $\mathrm{Hom}_A(-, U)$作用下保持正合。因此可得 $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow U'_1 \oplus U_1 \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ 在 $\mathrm{Hom}_A(-, U)$作用下保持正合。由 co-$*^n$-模定义得，$C' \in \mathrm{Copres}_A^n U$。又因为 $M'_1 \in \mathrm{Copres}_A^{k-1} U$，因此 $M' \in \mathrm{Copres}_A^k(\mathrm{Copres}_A^n U)$。因此由归纳假设知 $M' \in \mathrm{Copres}_A^k U$，因此可得 $M \in \mathrm{Copres}_A^{k+1} U$。

1 主要结果

引理 1.1 设 $\xi: A \longrightarrow R$ 是环同态，则

(1) 对任意双膜$_AU_B$ 和$_RM_S$，存在一个 $B-S$ 模同构

$$\mathrm{Hom}_R({}_RM, \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AM, {}_AU);$$

(2) 对任意$_AU$, $\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU) \in \mathrm{Cogen}_A U$ 当且仅当

$$\mathrm{Cogen}_R(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU)) = \{{}_RM \mid {}_AM \in \mathrm{Cogen}_A U\}。$$

证明 (1) $\mathrm{Hom}_R({}_RM, \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU)) = \mathrm{Hom}_R({}_A R_R \otimes {}_RM, {}_AU) = \mathrm{Hom}_A({}_AM, {}_AU)$。

(2) 设$_AM \in \mathrm{Cogen}_A U$，则存在一个单射 $0 \longrightarrow {}_AM \longrightarrow {}_AU^I$。作用 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_R -)$可得 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU^I) = \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU)^I$。又因为单射 $0 \longrightarrow {}_RM \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AM)$。因此 $_RM \in \mathrm{Cogen}_R(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。

反之，设$_RM \in \mathrm{Cogen}_R(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$，则存在单射

$0 \longrightarrow {}_RM \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))^{\Lambda_1}$。又因为 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU)) \in \mathrm{Cogen}_A U$，因此有单射 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU) \longrightarrow {}_AU^{\Lambda_2}$。因此得到单射 $0 \longrightarrow {}_AM \longrightarrow {}_AU^{\Lambda_1\Lambda_2}$。所以$_AM \in \mathrm{Cogen}_A U$。

下面提升 co-$*^n$-模。

引理 1.2 设 $\xi: A \longrightarrow R$ 是环同态，对任意 co-$*^n$-模$_AU$，$\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU)) \in \mathrm{Copres}_A^n U$ 当且仅当 $\mathrm{Copres}_R^n(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU)) = \{{}_RM \mid {}_AM \in \mathrm{Copres}_A^n U\}$。

证明 充分性显然。只证必要性。

任意$_RM$ 满足$_AM \in \mathrm{Copres}_A^n U$。因为 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU)) \in \mathrm{Copres}_A^n U$ 当且仅当 $\mathrm{Copres}_R^n(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$且

$\mathrm{Copres}_A^n U \subseteq \mathrm{Copres}_A U$。因此由引理 1.1(2)可得${}_RM \in \mathrm{Cogen}_R(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。因此有正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$在 $\mathrm{Hom}(-, \mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$下正合,其中 $V \in \mathrm{Prod}\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。再由引理 1.1(1)得上述 R-模正合列诱导的 A-模正合列在 $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AU)$下正合。因为${}_AU$ 是 co-$*^n$-模且${}_AM, V \in \mathrm{Copres}_A^n U$。因此由定义 0.1 可得${}_AM_1 \in \mathrm{Copres}_A^n U$。在对 R-模${}_RM_1$ 重复这个过程,最后由归纳可得${}_RM \in \mathrm{Copres}_R^n(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。

反之对任意${}_RM \in \mathrm{Copres}_R^n(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。存在 R-模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n$, 其中 $V_i \in \mathrm{Prod}(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。因此存在 A-模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n$。注意到 $V_i \in \mathrm{Prod}(\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU))$且 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU)) \in \mathrm{Copres}_A^n U$。又因为${}_AU$ 是 co-$*^n$-模, 因此由引理 0.1 得 $\mathrm{Copres}_A^n U$ 关于 n-kenel 和直和像闭。因此可得${}_AM \in \mathrm{Copres}_A^n U$。

定理　设 ξ: $A \longrightarrow R$ 是环同态, 若${}_AU$ 是左 A-co-$*^n$-模且 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_A, {}_AU)) \in \mathrm{Cogen}_A U$。则 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$是左 R-co-$*^n$-模。

证明　对任意 R-模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow L \longrightarrow 0$,其中${}_RV, {}_RM \in \mathrm{Copres}_R^n(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$。由假设和引理 1.1 和 1.2 得,可诱导一个 A-模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow L \longrightarrow 0$, 其中${}_RV, {}_RM \in \mathrm{Copres}_A^n U$。因此应用引理 1.2,定义 0.1 引和理 1.1(1)可得${}_RL \in \mathrm{Copres}_R^n(\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$当且仅当 A-模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow L \longrightarrow 0$ 在 $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AU)$作用下正合。因此由定义 0.1 得 $\mathrm{Hom}_A({}_AR_R, {}_AU))$是左 R-co-$*^n$-模。

参考文献:

[1] BRENNER S, BUTLER M C R. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarer reflections functors[J]. Lecture Notes in Mathmatics, 1980, 832:103-169.

[2] HAPPEL D, RINGEL C M. Tilted algebras[J]. Trans Amer Math Soc, 1982, 174:399-443.

[3] WEI Jiaqun. n-star modules and n-tilting modules[J]. Journal of Algebra, 2005, 283:711-722.

[4] WEI Jiaqun. n-star modules over ring extension[J]. Journal of Algebra, 2007, 310:903-916.

(编辑:李晓红)