文章编号:1671-9352(2008)10-0080-05

Reissner—Nordström 度规场中光子轨道的引力偏转

宫衍香,李峰
(泰山学院物理与电子科学系, 山东 泰安 271021)

摘要:采用后牛顿近似方法讨论了 Reissner—Nordström 度规场中光子轨道的引力偏转,给出了电荷量 Q 对光子偏转角度的影响,当电量为 0 时所得的一阶、二阶修正项与不带电天体的结论一致,该课题对于研究荷电天体的引力效应以及黑洞的奇异时空性质有重要意义。

关键词: Reissner—Nordström 度规;光子;轨道偏转;后牛顿近似
中图分类号:P12　　**文献标志码:**A

The orbit deflection of the photon in the Reissner-Nordström metric

GONG Yan-xiang, LI Feng
(Department of Physics and Electronics, Taishan University, Taian 271021, Shandong, China)

Abstract: The post-Newton approximation method was adopted to discuss the orbit deflection of the photon in the Reissner-Nordström metric field. The effects of the charge Q on the deflection angle were given. When electricity was equal to zero, the amendments of the first order and the second were in accord with the non charged celestial bodies. This topic is very important to the research of gravitational effects of charged bodies and the singular nature of space-time of black holes.

Key words: the Reissner-Nordström metric; photon; the orbit deflection; post-Newton approximation

0 引言

在静态球对称引力场方程的 Schwarzschild 解发表后不久,先后有 H. Reissner(1916)和 G.Nordström(1918)独立的发表了带电球体的引力场方程的解,被称为 Reissner—Nordström 度规[1],即

$$\mathrm{d}\tau^2=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}+\frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0c^4r^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}+\frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0c^4r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)。\tag{0.1}$$

Reissner—Nordström 度规是爱因斯坦引力场方程少数的几个著名"严格解"之一。去掉荷电项后 Reissner—Nordström 度规将回到 Schwarzschild 度规。由式(0.1)可以看出,随着距离的增加,荷电效应比引力质量的效应要衰减得快些。所以,当 r 很大时略去含 $1/r^2$ 的项,荷电效应可忽略不计,这时可看成只有质量引力势 $2GM/c^2r$ 起作用,因此,天体的运动状态和宇宙的结构主要还是由引力作用决定。不过,Reissner—Nordström 度规仍有其重要的意义,比如,它对黑洞的奇异时空性质的影响[1]。更重要的是,在引力实验中,如果考虑光子掠过带电球体的表面时的轨道偏转问题,荷电项将不可以忽略,因为荷电项代表的是二阶后牛顿精度项,而目前的引力实验已经达到了这一精度[2]。如果用 $O(n)$或 $O(c^{-n})$表示度规张量的各分量所要达到的精

收稿日期:2008-06-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10674099);泰山学院科研资助立项资助项目(Y-05-12)
作者简介:宫衍香(1977-　),男,讲师,硕士,研究方向为广义相对论中的近似计算方法.Email: yxgong@sina.com

度要求,则二阶后牛顿精度要求 g_{00} 要考虑到 $O(4)$项,g_{0i} 要到 $O(3)$项,g_{ij} 要到 $O(4)$项[2],这就是要考虑荷电项的原因。本世纪初,随着空间科学技术的发展,欧美发达国家先后提出了一系列的空间引力波探测项目,在这些测量计划中,光线的传播均需要计算到二阶后牛顿精度。比如欧洲宇航局的 LISA[3](laser interferometer space antenna, 2000),GAIA[4](global astrometric interferometer for astrophsica, 2001),美国航天局的 FAME[5](full-sky astrometric mapping explorer, 2000),还有中科院紫金山天文台的倪维斗教授等提出 ASTROD[6, 7](astrodynamic space test of relativity using optical devices, 2002)等。本文运用后牛顿近似的手法讨论了 Reissner—Nordström 度规场中光子轨道的引力偏转问题,计算给出了荷电项对光子轨道的影响。

1 光子的轨道微分方程($c\neq1$)

为了采用后牛顿近似方法,把 Reissner—Nordström 度规用式(1.1)表示。

$$d\tau^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)。\tag{1.1}$$

其中

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0 c^4 r^2},\tag{1.2}$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1}。\tag{1.3}$$

在后牛顿引力理论中,把包含 $O(c^{-n})$的项视为高阶小量[8],为了使讨论具有普遍性,把2者改写为

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0 c^4 r^2} + \cdots,\tag{1.4}$$

$$A(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0 c^4 r^2} + \frac{4G^2M^2}{c^4 r^2}\cdots。\tag{1.5}$$

在引力场中,静止质量为零的粒子如光子沿零短程线运动。零短程线即四维黎曼空间中满足 $ds^2=0$ 的短程线。也就是说光子运动必须满足基本方程[9](1.6)和(1.7)。

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0,\tag{1.6}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0。\tag{1.7}$$

其中 λ 为光线轨道上的仿射参数,因为 $ds=0$,所以不能取 $\lambda=s$,λ 应为另一参量($d\lambda\neq0$),由于力场是各向同性的,不失一般性,可以取质点的初始位置及速度在赤道平面上,则有

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{d\theta}{d\lambda} = 0。\tag{1.8}$$

由式(1.1)和式(1.8),式(1.7)可以写成3个方程:

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{B'c^2}{2A}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0,\tag{1.9}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0,\tag{1.10}$$

$$\frac{d^2t}{d^2\lambda} + \frac{B'}{B}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0。\tag{1.11}$$

为了寻找守恒量,把式(1.10)和式(1.11)用方程

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\ln\frac{d\varphi}{d\lambda} + \ln r^2\right) = 0,\tag{1.12}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\ln\frac{dt}{d\lambda} + \ln B\right) = 0\tag{1.13}$$

表示,很显然式(1.12)可以得到一个守恒量 J,即

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = J。\tag{1.14}$$

通过适当的变换[9],由式(1.13)可以得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{1}{B}。\tag{1.15}$$

由式(1.14)和式(1.15),式(1.9)可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2-\frac{J^2}{r^3 A}+\frac{B'c^2}{2AB^2}=0,\tag{1.16}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{c^2}{B}\right]=0。\tag{1.17}$$

这样可以得到另外一个运动积分 E

$$A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{c^2}{B}=-E。\tag{1.18}$$

联立式(1.14)和式(1.18),消去参数 λ 可得

$$\frac{A}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{c^2}{J^2 B}=-\frac{E}{J^2}。\tag{1.19}$$

式(1.19)即为光子在引力场赤道面上的轨道微分方程。

把式(1.15)带入式(1.18),可以消去参量 λ,得到轨道变量 r 对时间 t 的导数,即有

$$\frac{A}{B^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{c^2}{B}=-E。\tag{1.20}$$

后面将用这一关系定出积分常数 E。

2　轨道的偏转角度

考虑光子从距离引力中心无穷远处入射到引力场中。在无穷远处,度规应为平直空间的 Minkowski 度规,即有

$$A(\infty)=B(\infty)=1。\tag{2.1}$$

式(2.1)表明不受引力影响时,光线沿直线传播。如图 1,设入射的瞄准距离为 b,入射方向为 φ_∞,由图 1 则有

$$c\approx-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{r\cos[\varphi_\infty-\varphi(r)]\}\approx-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}。\tag{2.2}$$

把式(2.1)带入式(1.20),并利用 $A(\infty)=B(\infty)=1$ 可以定出

$$E=0。\tag{2.3}$$

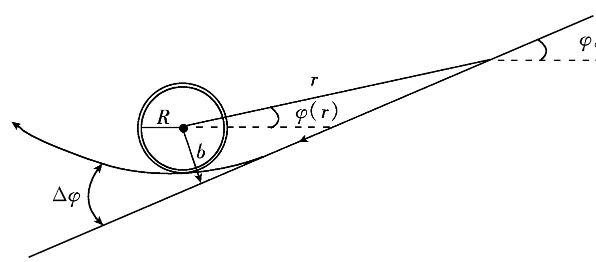

图 1　光子轨道偏转示意图

Fig.1　The sketch map of photon's orbit deflection

对于另一个积分常数 J 利用荷电天体的半径 R 来表示比较方便,因有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{r=R}=0。\tag{2.4}$$

把式(2.4)带入式(1.19),则有

$$\frac{1}{R^2}-\frac{c^2}{J^2 B(R)}=0。\tag{2.5}$$

即有

$$J=\frac{Rc}{\sqrt{B(R)}}。\tag{2.6}$$

把式(1.19)积分可得其解

$$\varphi=\pm\int\frac{\sqrt{A}}{r^2\sqrt{\frac{c^2}{J^2 B(r)}-\frac{1}{r^2}}}\mathrm{d}r。\tag{2.7}$$

把式(2.6)带入式(2.7)并定出积分限得

$$\varphi(r)=\varphi_{\infty}+\int_{r}^{\infty}A^{1/2}(r)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}\left(\frac{B(R)}{B(r)}\right)-1\right]^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r}。\tag{2.8}$$

由图1中的对称性可知,当 r 从无穷大减小到它的最小值 R,然后又增至无穷大时,φ 总的改变正好是 ∞ 到 R 的2倍,即有 $|\varphi(\infty)-\varphi(-\infty)|=2|\varphi(R)-\varphi(\infty)|$,如果光子沿直线传播,则有 $|\varphi(\infty)-\varphi(-\infty)|=\pi$。所以轨道相对于直线的偏离为

$$\Delta\varphi=2|\varphi(R)-\varphi(\infty)|-\pi。\tag{2.9}$$

下面采用后牛顿近似方法处理,令

$$\frac{B(R)}{B(r)}=1+O(2)+O(4)+\cdots,\tag{2.10}$$

$O(n)$ 为包含 c^{-n} 的未知项,即有

$$B(R)=B(r)+O(2)B(r)+O(4)B(r)+\cdots。\tag{2.11}$$

由式(1.4),比较式(2.11)两边含 c^{-n} 的同阶项,不难得出

$$\frac{B(R)}{B(r)}=1+\frac{2GM}{c^{2}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{GQ^{2}}{8\pi\varepsilon_{0}c^{4}}\left(\frac{1}{R^{2}}-\frac{1}{r^{2}}\right)+\frac{4G^{2}M^{2}}{c^{4}r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\cdots。\tag{2.12}$$

为了便于积分,把式(2.8)中括号里面的部分改写为式(2.13)。

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{2}\left(\frac{B(R)}{B(r)}\right)-1=\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1\right][1+O(2)+O(4)+\cdots]。\tag{2.13}$$

用同样的方法可以定出待定量,即有

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{2}\left(\frac{B(R)}{B(r)}\right)-1=\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1\right]\left[1-\frac{2GMr}{R(r+R)c^{2}}+\frac{GQ^{2}}{8\pi\varepsilon_{0}R^{2}c^{4}}-\frac{4G^{2}M^{2}}{R(r+R)c^{4}}+\cdots\right]。\tag{2.14}$$

利用

$$(1+x)^{m}=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\cdots,\tag{2.15}$$

把积分号中的相应部分展开,并保留到二阶后牛顿项,可得

$$\varphi(r)-\varphi(\infty)=\int_{r}^{\infty}\frac{1}{r}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1\right]^{-1/2}\left[1+\frac{GM}{rc^{2}}+\frac{GMr}{R(r+R)c^{2}}+\frac{3G^{2}M^{2}}{R(r+R)c^{4}}+\frac{3}{2}\frac{G^{2}M^{2}}{r^{2}c^{4}}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{16}\frac{GQ^{2}}{\pi\varepsilon_{0}r^{2}c^{4}}-\frac{1}{16}\frac{GQ^{2}}{\pi\varepsilon_{0}R^{2}c^{4}}+\frac{3}{2}\frac{G^{2}M^{2}r^{2}}{R^{2}(r+R)^{2}c^{4}}+\cdots\right]\mathrm{d}r。\tag{2.16}$$

把被积函数的各项逐个积分,结果为

$$\varphi(r)-\varphi(\infty)=\frac{2GM}{c^{2}R}+\arctan\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1\right]^{-\frac{1}{2}}-\frac{GM}{c^{2}r}\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1}-\frac{GM}{c^{2}R}\sqrt{\frac{r-R}{r+R}}+\frac{G^{2}M^{2}}{2c^{4}R}\sqrt{\frac{r-R}{(r+R)^{3}}}-$$
$$\frac{2G^{2}M^{2}}{c^{4}R^{2}}+\frac{2G^{2}M^{2}}{c^{4}R^{2}}\sqrt{\frac{r-R}{r+R}}-\frac{3G^{2}M^{2}}{4c^{4}r^{2}}\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1}+\frac{GQ^{2}}{32\pi\varepsilon_{0}c^{4}r^{2}}\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1}+$$
$$\frac{15G^{2}M^{2}}{4c^{4}R^{2}}\arctan\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1\right]^{-\frac{1}{2}}-\frac{3GQ^{2}}{32\pi\varepsilon_{0}c^{4}R^{2}}\arctan\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-1\right]^{-\frac{1}{2}}+\cdots。\tag{2.17}$$

把式(2.17)带入式(2.9),得到光子掠过荷电天体表面时的偏转角度

$$\Delta\varphi=2|\varphi(R)-\varphi(\infty)|-\pi=\frac{4GM}{c^{2}R}-\frac{4G^{2}M^{2}}{c^{4}R^{2}}+\frac{15\pi G^{2}M^{2}}{4c^{4}R^{2}}-\frac{3GQ^{2}}{32\varepsilon_{0}c^{4}R^{2}}+\cdots。\tag{2.18}$$

3 讨论

式(2.18)即为光线掠过荷电天体表面时二阶后牛顿精度上的轨道偏转角,如果只考虑到一阶后牛顿项,偏转角度为 $\frac{4GM}{c^{2}R}$,若所考虑天体为太阳,则 $M=1.989\times10^{33}\,\mathrm{g}$,$R=6.96\times10^{5}\,\mathrm{km}$,其结果为1.75″,这和经典教材的结果一致[10]。式(2.37)的后三项为二阶后牛顿修正项,其中前两项为不带电天体的二阶后牛顿修正项,这和前人的结果完全一致[9],最后一项即为荷电 Q 部分对光线轨道的影响,对 Reissner—Nordström 度

规场而言,目前的实验精度已经达到上述各项。

参考文献:

[1] 唐肇华,刘素芸,翁甲强. 广义相对论导论[M]. 桂林:广西师范大学出版社,1997.
[2] XU Chong-Ming, WU Xue-Jun. Extending the first-order post-newtonian scheme in multiple systems to the second-order contributions to light propagation[J]. Chin Phys Lett, 2003, 20:195-198.
[3] DANZMANN K, RUDIGER A. LISA technology-concept, status, prospects[J]. Class Quantum Grav, 2003, 20:1-69.
[4] PERRYMAN M A C, de BOER K S, GILMORE G, et al. GAIA: composition, formation and evolution of the Galaxy[J]. Astron & Astrophys, 2001, 369:339-363.
[5] TRIEBES K I J, GILLIAM L, HARRIS F, et al. Full sky astrometric mapping explorer, FAME, CCD centroiding experiment[J]. American Astronomical Society, 1999, 31:1505-1513.
[6] Ni W-T, ZHU Jin, WU Xiang-Ping, et al. Mini-ASTROD: mission concept[J]. Int J Mod Phys D, 2002, 11:1035-1048.
[7] Ni W-T. ASTROD-an overview[J]. Int J Mod Phys D, 2002, 11:947-962.
[8] 温伯格(S. Weinberg). 引力论和宇宙论:广义相对论的原理和应用[M].北京:科学出版社,1980.
[9] 须重明, 吴雪君. 广义相对论与现代宇宙学[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 1999.
[10] Will C. Theory and experiment in gravitational physics[M]. Melboume, Australia: Cambridge University Press, 1981.

（编辑:孙培芹）