

# 铁氧体加载谐振腔的时间响应和 偏流调谐系统的稳定性

严太玄 孙立博

(中国科学院高能物理研究所)

通常  
豫时

## 摘 要

本文建议了描述铁氧体加载谐振腔时间响应的状态空间模型和一种新的数字式测量方法,并给出了在模型腔上实测的结果.在此基础上讨论了铁氧体加载谐振腔偏流调节系统在运行稳态下对快速扰动的稳定性.

## 一、引 言

铁氧体材料的时滞现象的理论分析较早见于[1,1937],自从1959年在加速器应用中发现了导磁率的反常减落现象和动态高频吸收[2,1959]以来,铁氧体材料和铁氧体加载谐振腔在高频应用下的性能受到各国加速器工作者和物理工作者的注意. Л. Б. Розен-Баум[3,4]用实验分析的方法证明铁氧体材料中减落分量和弛豫分量有相同的弛豫时间谱. Теарне 在 CERN 对于模型环路和实际环路作了偏流调谐系统的动态测量[7,8],严太玄曾提出了一种测量铁氧体时间响应的模拟方法.关于铁氧体材料后效的详尽论述可参见[5],[9].本文在上述工作的基础上,给出描述后效的状态空间模型和一种数字式时间响应的测量方法及对国产铁氧体材料的实测结果.并用这个模型和实测参数讨论了偏流调谐系统对小信号快速扰动的稳定性,得到了涉及减落分量对系统稳定性影响的二个结论.

化依

## 二、铁氧体加载谐振腔的状态空间模型

加载谐振腔在小信号阶跃偏流变化的情况下,谐振频率随时间的变化分为如下三种分量:

$$\delta f(t) = \delta f_0 + \delta f_N(t) + \delta f_a(t) \quad (1)$$

其中  $\delta f_0$  是不随时间变化的快速响应分量

$\delta f_N(t)$  是粘滞分量

$\delta f_a(t)$  是减落 (disaccomodation) 分量

于月

过,  
立.

间本

记  $\delta f_\infty$  是达到稳态时最终谐振频率变化量, 则可用相对变化表示各个分量如下:

$$\frac{\delta f(t)}{\delta f_\infty} = D_Q + D_N(1 - p_1(t)) + D_d p_2(t) \quad (2)$$

式中  $D_Q = \frac{\delta f_Q}{\delta f_\infty}$ ,  $D_N = \frac{\delta f_N(\infty)}{\delta f_\infty}$ ,  $D_d = \frac{\delta f_d(0)}{\delta f_\infty}$ ,

$p_1(t)$  及  $p_2(t)$  分别为描述粘滞分量和减落分量随时间变化的规律.

实验证明: 铁氧体的导磁率随外界交变信号频率而变化, ( $\mu = \mu(\omega)$ ), 称为磁谱) 且通常存在着多种弛豫时间谱. 如记最小和最大的弛豫时间为  $\tau_{\min}$  及  $\tau_{\max}$ , 则铁氧体的弛豫时间谱分布为<sup>[1]</sup>

$$p(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \cdot \frac{1}{\tau}, & \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \\ 0 & \end{cases} \quad (3)$$

根据上式可导出铁氧体加载谐振腔对小信号阶跃偏流变化的响应为 [4, 5]

$$\frac{\delta f(t)}{\delta f_\infty} = 1 - \frac{D_N + D_d}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} [E_i(-t/\tau_{\min}) - E_i(-t/\tau_{\max})] \quad (4)$$

其中  $E_i(-x) \triangleq - \int_x^\infty \frac{1}{s} e^{-s} ds$

相应的复频域传递函数为 [10]

$$H(s) = \delta f_\infty \left[ 1 - \frac{D_N + D_d}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \ln \frac{s\tau_{\max} + 1}{s\tau_{\min} + 1} \right] \quad (5)$$

(4), (5) 反映了当偏流输入为  $I_0 + \delta I v(t)$ ,  $\delta I \ll I_0$  的条件下, 材料磁化率随时间变化的规律. 但具有如下的缺点和局限:

1, 推导过程中曾假定样品材料中偏置磁场强度  $H_0$  均匀分布.

2, 推导过程中曾假定样品材料中激活能  $Q$  在

$Q_{\min} \sim Q_{\max}$  之间均匀分布.

3, 数学形式包含了超越函数  $E_i(x)$ , 其拉式变换式中也包含  $\ln \frac{s\tau_1 + 1}{s\tau_2 + 1}$  的形式, 不便

于用解析方法研究闭环系统的性质.

由于在增强器的实际应用中, 铁氧体材料做成环状, 偏置电流和高频电流都从中心流过, 磁场  $H_0$  和  $H_r$  沿半径方向按  $1/r$  分布, 幅度差别达到 1:2.5, 故 1, 2 二个假定不再成立.

考虑到上述实际情况, 笔者建议描述实际腔的时间响应特性的简化线性定常状态空间模型如下. 推导参见 [10].

$$\delta f(t) = \delta f_\infty \left[ 1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{-t/\tau_j} \right] \quad (6)$$

(6) 式可以直观地理解为在给定的偏流  $I_0$  时, 腔中的铁氧体材料可以看做有  $N$  个有

数  
加

立用中  
本加载  
谐振-  
象时间  
8], 严  
论述可  
式时  
了偏  
与二个

三  
种

(1)

自己的不变的弛豫时间部分；各个部分之间没有相互作用。它们对宏观总弛豫过程的贡献，按各自的加权系数的权构成。在  $t = 0$  的瞬间，有：

$$\delta f(0) = \delta f_{\infty} \left[ 1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j \right] \quad (7)$$

当  $\sum_{j=1}^N \alpha_j \leq 1$  时，它描述了快速分量。若  $\sum_{j=1}^N \alpha_j > 1$  上式给出减落 (disaccommodation) 下跳变的幅度。式中包含的各量， $\delta f_{\infty}$ ， $\{\alpha_j\}_1^N$ ， $\{\tau_j\}_1^N$ ，应由实际测量结果拟合确定，而且随工作点  $I_0$  的变化而变化。

(6)式对应如下的线性系统；

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + du \end{cases} \quad (8)$$

其中  $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1/\tau_N \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \cdots c_n],$$

$$d = d. \quad (9)$$

线性系统(6)对应的框图如下；

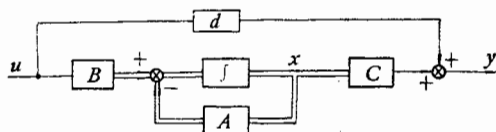


图1 线性定常微变模型框图

表1 两种模型比较

	理 论 模 型	简 化 模 型
阶跃响应 $\delta f(t)$	$\delta f_{\infty} \left[ 1 - \frac{D}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} [E_i(-t/\tau_{\min}) - E_i(-t/\tau_{\max})] \right]$	$\delta f_{\infty} \left[ 1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{-t/\tau_j} \right]$
冲激响应	$[1 - D]\delta(t) + \frac{D}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \left[ \frac{1}{t} (e^{-t/\tau_{\max}} - e^{-t/\tau_{\min}}) \right]$	$(1 - D)\delta(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\tau_j} e^{-t/\tau_j}$
传递函数	$1 - \frac{D}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \ln \left( \frac{1 + \tau_{\max} s}{1 + \tau_{\min} s} \right)$	$(1 - D) + \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{1}{s\tau_j + 1}$
状态空间模型	包含无穷维参量的分布参数系统	$H(s) = c[SI - A]^{-1}B + d$

分成  
期变  
迟同  
进行  
其瞬  
周期  
分量

以转  
(12  
秒-

且有  
点，  
在2

的1  
测量

表 1 给出文献中习用的铁氧体材料的时间响应曲线的理论模型([4], [5])与作者给出的线性定常简化模型比较。

### 三、铁氧体加载谐振腔时间响应特性的一种数字式测量方法

这里建议的全数字式吞脉冲延迟采样测量的方法与传统的模拟测量方法相比, 可以以较高精度给出周期驱动下动态响应的数字结果。本仪器可以适用于实际工作频率(12.5Hz)或缓慢变化的周期偏流作用下响应的测量, 并可以以手工记录容许的速度(1.6秒一次)显示数字测量结果。

按瞬时频率定义, 其数字测量方法应当在充分短的时间之内测量信号的完整周期数, 且有  $\bar{f} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$  ( $\Delta t$  充分小)。对于  $T = 80\text{ms}$  的方波响应, 采用  $\Delta t = 0.1\text{ms}$  采样点为 80 点, 频率计的主闸门在  $t = T_i$  和  $t = T_i + 100\mu\text{s}$  之间开启, 以此时间间隔内的计数作为在  $T_i$  时刻的瞬时频率的数字结果。

测量装置由电感/电容三点式电子管振荡器, 偏流源, 控制逻辑单元和一台经过改制的 E-324 数字频率计组成。用一台 SR-8 同步示波器做为偏流及驱动波形监测和辅助测量。

其框图见图 2。

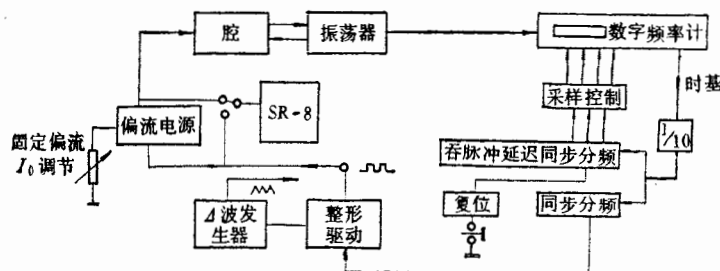


图 2 测量装置结构框图

频率计晶振输出的标准时基信号经 1/10 分频器形成脉宽  $100\mu\text{s}$ , 周期  $1\text{ms}$  的方波并分成两路。一路经 1/80 分频并经整形电路, 得到周期  $80\text{ms}$  的方波送入偏流源, 以产生周期变化的阶跃偏流, 阶跃幅度为  $10\text{A}$ 。作为铁氧体腔的偏置输入。另一路送到吞脉冲延迟同步分频器, 产生准确移相的采样脉冲和控制脉冲, 操纵 E-324 数字频率计对输入信号进行自动测量。电感三点式电子管高频振荡器以受偏流控制的铁氧体腔做为谐振电路, 其瞬时振荡频率直接送入数字频率计以供测量。频率计给出的数字结果, 是对连续十个周期内同一相位处采样结果的平均值, 并自动进行采样点的移位。通过调节偏流的直流分量, 可以在  $0 \sim 250\text{A}$  内改变腔的工作点。

### 四、数学模型的最优拟合

对应于每一给定的固定偏置工作点  $I_0$ , 测量结果经整理表达为

$$\delta f^*(t_i) \quad t_i = 1, 2, \dots, 80 \quad (10)$$

最优拟合的目的,是以(10)为目标,选择(6)式中各参数  $\{\tau_i\}$ ,  $\{\alpha_i\}$ ,  $\delta f_\infty$ , 使下式取极值

$$\sigma = \sum_{i=1}^{40} [\delta f(t_i) - \delta f^*(t)]^2 = \min \quad (11)$$

注意到  $\{\tau_i\}$  在表达式中处于指数上,因而这是一个非线性最优拟合问题。由物理分析,我们已经知道弛豫时间以谱分布形式存在。

假想  $N-1$  个分点将谱分成  $N$  段,记为  $I_1, I_2, \dots, I_N$ 。谱分布保证了每个  $\tau_i$  将在对应的第  $I_i$  段中取得其最优的数值  $\tau_i^*$ 。

我们将最优拟合的问题分成两步解决:

1) 对于一组给定的  $\{\tau_i\}^N$ , 其中  $\tau_i \in I_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 对表达式(1)进行最小二乘拟合,得到一组系数  $\{\alpha_i\}_i^N$ , 并计算出对应的方差  $\sigma$ 。

2) 令  $\{\tau_i\}^N$ , 在  $\{I_i\}^N$  中进行枚举搜索,重复上述过程,并比较相邻二次拟合的方差,保留方差  $\sigma$  小的一组数据。

对于 2M43 铁氧体中环和由 3M28 铁氧体中环加载的模型谐振腔,在不同固定偏流下进行了幅度为  $\delta_i = 10A$  的周期方波稳态响应的测量。附表 2 给出包含 3 个弛豫时间

表 2 各对应模型参数

$I_0$	$\Delta f(\text{kHz})$ 的数学模型 ( $t:\text{ms}$ )	传递函数	方差 $\sigma$
0	$204.4 - (36.9e^{-t} + 37.8e^{-0.25t} + 78.8e^{-0.05t})$	$14.5 + \frac{36.9}{s+1} + \frac{73.8}{4s+1} + \frac{78.8}{20s+1}$	2.2
20	$212 - (76e^{-3.3t} + 51e^{-0.25t} + 55e^{-0.025t})$	$30 + \frac{76}{0.3s+1} + \frac{51}{4s+1} + \frac{55}{40s+1}$	1.9
60	$167 - (104.6e^{-3.3t} + 27e^{-0.125t} + 5.4e^{-0.05t})$	$30 + \frac{104.6}{0.3s+1} + \frac{27}{8s+1} + \frac{5.4}{20s+1}$	3.2
100	$194.9 - (107.2e^{-3.3t} + 9.8e^{-0.17t} + 48.8e^{-0.005t})$	$29 + \frac{107.2}{0.3s+1} + \frac{9.8}{6s+1} + \frac{48.8}{200s+1}$	1.9
160	$150 - (94.4e^{-3.3t} + 6.6e^{-0.5t} + 30e^{-0.005t})$	$19 + \frac{94.4}{0.3s+1} + \frac{6.6}{2s+1} + \frac{30}{200s+1}$	4.1
220	$100.9 - (77.3e^{-10t} - 0.8e^{-0.5t} + 5.5e^{-0.05t})$	$19 + \frac{77.3}{0.1s+1} + \frac{0.8}{2s+1} + \frac{5.5}{20s+1}$	2.4

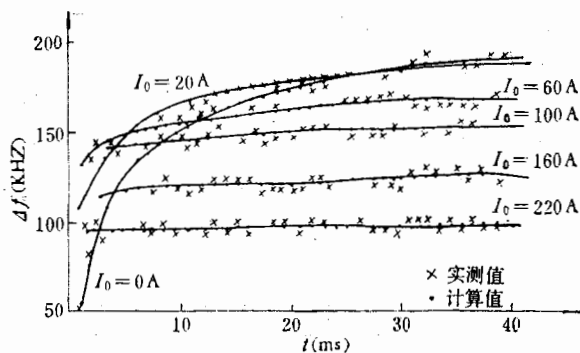


图 3 铁氧体加载模型腔的时间响应曲线

的数  
寻优  
方案  
的测  
扰,传

输入  
振频:  
的周:  
个周:  
铁氧

不难

式(1

的数学模型和以上述测量结果为目标的最优拟合计算结果, 在对时间常数  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  进行寻优时, 令  $\tau_i$  在各自变化区域内进行枚举搜索 (10 点)。因而最后得到的结果是 1000 个方案比较后的方差最小的结果。图 3 示出在  $I_0 = 0A, 20A, 60A, 100A, 160A, 220A$  时的测量结果和拟合结果的曲线。可以看出除了在大电流偏置条件下由于偏流源引入干扰, 使测量值有异常的起伏, 因而导致方差较大之外, 拟合值与测量值十分精确地接近。

### 五、偏流自动调谐系统的稳定性

本节讨论在快循环增强器中铁氧体加载谐振腔偏流自动调谐系统的稳定性。系统的方框图如下。

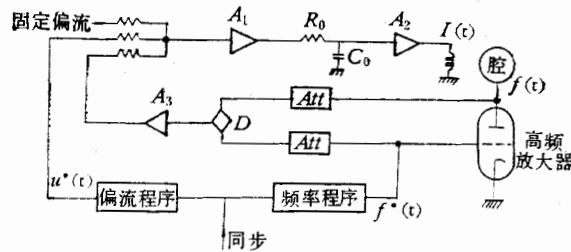


图 4 偏流自动调谐系统结构框图

为了使腔的谐振频率时刻跟踪给定的频率程序  $f^*(t)$ , 在该调谐系统中加有偏流控制输入  $u^*(t)$ 。鉴相器检测瞬时的失谐, 并反馈到偏流放大器, 通过改变腔的偏置, 减小其谐振频率  $f(t)$  与频率程序  $f^*(t)$  的偏差。在增强器工作的稳态下,  $f^*(t), u^*(t)$  是  $T = 80ms$  的周期函数。实验表明, 这时环路中偏流  $I$  亦是同一周期的周期函数  $I_d^*(t)$ 。我们讨论这个周期解在扰动下的稳定性。对于偏流调谐系统, 主要扰动来自束流负载效应(周期性), 铁氧体和电源引入的噪声(随机变化)。把扰动换算到输入端, 等价于输入:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + \delta u(t) & |\delta u(t)| &\ll |u^*(t)| \\ f(t) &= f^*(t) + \delta f(t) & |\delta f(t)| &\ll |f^*(t)| \end{aligned} \quad (12)$$

不难得到描述扰动的线性系统。如下图所示。

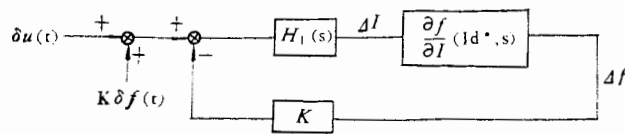


图 5 描述扰动的线性系统

$$\left[ 1 + H_1(s) K \frac{\partial f}{\partial I} (I_d^*, s) \right] \Delta I(t) = H_1(s) \delta u(t) + K H_1(s) \delta f(t) \quad (13)$$

式(13)中

$H_1(s) = A_1 A_2 \frac{1}{1 + \tau_0 s}$  A/mV 是偏流源的传递函数 ( $s$  表示微分算子, 下同)

$K = A_3 \frac{2Q}{f} \text{ mV/KC}$  是鉴相器增益

$\frac{\partial f}{\partial I} (I_d^*, s) \text{ KC/A}$  是偏流为  $I_d$  时腔的小信号传递函数

将三中得到的传递函数代入(13)

$$\text{记} \quad \lambda_0 = \frac{1}{\tau_0} (1 + KA, A_2 d), \quad c_i = \frac{1}{\tau_0} KA_1 A_2 \frac{\alpha_i}{\tau_i}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\tau_i} \quad i = 1, 2, 3$$

定义状态向量

$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3]^T$ , 其中  $x_0$  对应于偏流,  $x_1, x_2, x_3$  对应于铁氧体中的弛豫分量,  $y = \Delta f(t)$ , 可以导出图5对应的状态空间方程为:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta f(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$y = \begin{bmatrix} d & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{简记为:} \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + Bu \quad (A(t) = A(t+T)) \quad (15)$$

$$y = c(t)x \quad (c(t) = c(t+T))$$

一般地讨论周期系统(15)解的性质, 将涉及复杂的数值计算, 而且难于得到系统参数变化后解的性质的变化趋势。我们采用近似方法给出定性结果。

从实验数据的分析, 我们得到在一周期内, 矩阵  $A(t)$  的系数总满足

$$c_2 \ll c_1, \quad c_3 \ll c_1 \quad (16)$$

条件(16)使我们可以采用耦合摄动法求(15)式的近似解。令  $c_2 = c_3 = 0$ , 我们得到阶数降低的齐次方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & -c_1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于  $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ , 容易证明, (17)式解的性质(发散或收敛)与(15)相同。

我们应用冻结系数法讨论(17)。利用实验数据, 可以证明[13], (17)式确实满足缓变系数的条件。其本征方程为

$$(s + p_1)(s + p_2) + \bar{K}(s + p_2) = 0 \quad (18)$$

式中

$$p_1 = \frac{1}{\tau_0}, \quad p_2 = \frac{1}{\tau_1}, \quad \bar{K} = KA_1 A_2 \frac{d}{\tau_0}$$

$$\theta = \frac{d + \alpha_1}{d}$$

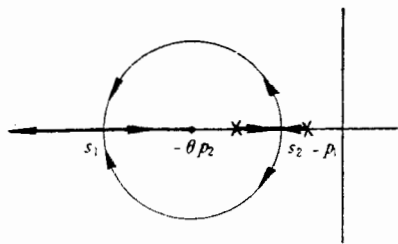
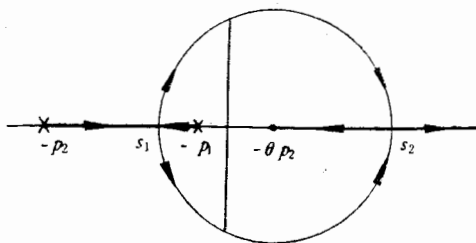
6,7.

d  
当铁氧  
系统不

1. 数学  
迟采  
性。  
讨论  
分布  
2. 铁氧  
象的  
这  
工作频  
在

[1] G  
[2] B  
[3] J  
[4] J  
[5] H  
[6] W  
[7] M  
[8] M  
[9] 李

(18) 式的根, 随  $\bar{K}$  变化的轨迹可以分成二种情况. 其对应的根轨迹图分别示于图 6, 7.

图 6 1.  $d > 0$ 图 7 2.  $d < 0,$ 

$$\theta = \frac{d + \alpha_1}{d} < 0$$

$d > 0$  的情况表明系统(17), 进而(15)在增益  $\bar{K}$  从  $0 \rightarrow \infty$  的变化中, 总是稳定的. 而当铁氧体腔存在小于 0 的减落分量时 ( $\frac{d + \alpha_1}{d} < 0$ ), 由图 7 知环路增益过大就可能引起系统不稳定. 因此, 在选择铁氧体腔的工作点时, 应当注意避开有减落分量的电流区段.

## 六、结 论

1. 数学拟合的结果表明, 本文建议的铁氧体加载谐振腔的状态空间模型和应用吞脉冲延迟采样的数字式时间响应特性的测量方法, 较好的反映了铁氧体加载谐振腔的时间特性. 它与经典模型和现存方法相比, 有较高的精确度, 并且适用于用现代控制论的方法讨论相应的控制系统的性质. 这种方法容易推广到包含铁电体, 压电体, 弹性体等具有分布参数的弛豫系统的研究工作中去.

2. 铁氧体加载谐振腔偏流自动调谐系统从本质上说是一个包含非线性和分布参数受控对象的控制系统. 本文应用状态空间模型讨论了运行稳态下周期解的稳定性.

这只是关于这类控制系统研究的初步结果. 其它如强场下的非线性, 启动过程, 提高工作频率等具有实际意义的问题, 有待于进一步的研究工作.

在工作过程中, 得到秦玖、李建国等同志有益的帮助与讨论, 特此致谢.

## 参 考 文 献

- [1] G. Richter, *Ann. der Physik*, B29, S605, 1937.
- [2] B. Chiron, R. Schoen, *L'Onde Electr.*, 39(1959), 537.
- [3] Л. Б. Розенбаум, *Физика Твёрдого Тела*, No5 (1967), 1294.
- [4] Л. Б. Розенбаум, *Физика Твёрдого Тела*, No3 (1969), 576.
- [5] H. Kronmüller, *Nachwirkung in Ferromagnetika*, Springer, 1968.
- [6] W. Pinkl, 私人通信 MPS/SR/WP/iw, 28, 5, 1973.
- [7] M. J. Teague, CERN SI/NOTE, EL/70-4 1970.
- [8] M. J. Teague, CERN SI/NOTE, EL/70-7 1970.
- [9] 李荫远, 李国栋, 铁氧体物理学, 科学出版社, 1978.
- [10] 孙立博, 铁氧体加载谐振腔的时间响应和偏流调谐系统的稳定性, 研究生毕业论文, 高能物理研究所, 1981.



## THE TIME RESPONSE OF THE FERRITE LOADED CAVITY AND STABILITY OF BIAS AUTOTUNING SYSTEM

YAN TAI-XUAN    SUN LI-BO

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

A state space model is described, the time response of ferrite loaded cavity is proposed and a new digital measuring method devised.

Results of actual measurement on model cavity are given. On these bases the stability of stationary state of bias autotuning system to fast external perturbation is discussed.

振  
值  
Cler  
接  
远  
先  
束  
应  
程  
而  
在