

## 6 - CPS 正交并联机器人位置正解分析<sup>\*</sup>

车林仙<sup>1,2</sup>

(1. 中国矿业大学机电工程学院, 徐州 221008; 2. 泸州职业技术学院机电工程研究所, 泸州 646005)

**【摘要】** 根据并联机器人机构结构综合理论, 提出了一种 6 - DOF 6 - CPS 正交并联机器人机构, 并对位置正解进行分析。以机构 6 条驱动腿的长度为约束条件, 建立约束方程, 得到了求位置正解的非线性方程组。应用产生或强化混沌系统的反馈混沌化方法——Chen-Lai 算法, 对离散时间系统施加反馈控制, 可得到预期 Lyapunov 指数和良好遍历性的混沌系统。应用基于反馈混沌化的 Newton 迭代算法(CBNIA)求解 6 - CPS 正交并联机器人机构正位置分析中的非线性方程组。数值验证表明, CBNIA 能够快速求出全部位置正解, 且正反解结果十分吻合。

**关键词:** 并联机器人 位置正解分析 反馈混沌化 Newton 迭代法

**中图分类号:** TH112; TP242

**文献标识码:** A

## Forward Positional Analysis of 6 - CPS Orthogonal Parallel Manipulators

Che Linxian<sup>1,2</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China

2. Institute of Mechatronics Engineering, Luzhou Vocational & Technical College, Luzhou 646005, China)

### Abstract

A 6 - DOF 6 - CPS orthogonal parallel manipulator was presented, based on the theory of the structure synthesis for parallel robot mechanisms. The forward kinematics of the manipulator was studied to analyze the positive positional solutions. With the restrict condition of the lengths of six actuated limbs, the constrained equations were established, and the nonlinear equations (NLEs) were obtained to solve forward positional problems of the mechanism. Based on the Chen-Lai algorithm, by means of which chaos was generated or modified, a discrete-time dynamical system was feedback controlled to be transferred to a chaotic system that has the expected Lyapunov exponent and good ergodicity. The chaotification-based Newton iterative algorithm (CBNIA) was utilized to solve NLEs for forward displacement analysis of 6 - CPS orthogonal parallel manipulators. The results of numerical verification show that through the CBNIA, all forward solutions can be quickly found that are very coincident with the inverse ones.

**Key words** Parallel manipulator, Positive positional analysis, Chaotification, Newton iterative method

### 引言

高小山等<sup>[1-2]</sup>提出由点、线、面 3 种几何元素通过角度约束以及距离约束来构造并联机器人机构的新方法。根据这一理论, 提出了 5SPS - 1CCS、4SPS - 2CCS 及 6 - CCS 等广义 Stewart 并联机器人

机构<sup>[3-5]</sup>。由几何学分析可知,  $C_1 \perp C_2 - S$  运动链与  $C \perp P - S$  运动链等效。根据高小山等的理论, 并借鉴金振林等<sup>[6]</sup>的研究结果, 本文提出一种新型 6 - CPS 正交并联机器人机构, 并分析其位置正解。

Newton 迭代法是求解非线性方程组的主要方法之一, 具有二阶敛速, 但对初始点的选择较敏感。

文献[7~10]应用基于 Julia 集的 Newton 迭代法求解机构综合中的非线性方程组。文献[11]直接以 Logistic 混沌序列作为 Newton 迭代法的初始点,该方法更简便。但文献[12]指出, $\mu = 4$  时的 Logistic 混沌序列服从 Чебышев 型概率分布,以 Logistic 混沌序列作为迭代搜索的初始点,效率不高。文献[13~14]提出以变参数复合混沌序列、Hénon 混沌序列作为 Newton 迭代法的初始点。文献[15~17]提出产生或强化混沌序列的反馈混沌化方法,对离散时间系统施加反馈控制,可得到预期 Lyapunov 指数和良好遍历性的混沌系统。本文应用基于反馈混沌化的 Newton 迭代算法 (chaotification-based Newton iterative algorithm, 简称 CBNIA) 求解非线性方程组,以具有良好遍历性的反馈混沌化 Logistic 序列作为 Newton 迭代法的初始点,可快速求出非线性方程组的全部解。应用 CBNIA 求解 6-CPS 正交并联机器人机构正位置分析中的非线性方程组,以得到全部位置正解。

## 1 6-CPS 正交并联机器人机构结构描述

新型 6-CPS 正交并联机器人机构简图如图 1 所示。

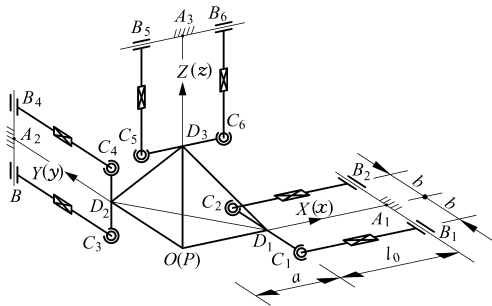


图 1 6-CPS 正交并联机器人机构简图

Fig.1 Architecture sketch of a 6-CPS orthogonal parallel manipulator

该机构由动平台  $P-D_1D_2D_3$ 、6 条支链 SOC  $\{C-P-S\}$  和机座  $A_1-A_2-A_3$  组成。6 条支链分为 3 对,且各支链中均以直线移动副为驱动副。3 对支链与动平台相连的 3 对球铰分别分布在边长为  $2a$  的立方体(图中简化为正三棱锥)的 3 个互相垂直的表面上,且各对球铰中心连线在空间两两互相垂直;各对球铰中心的距离为  $2b$ 。每对支链的两个圆柱副共轴线,3 对圆柱副的轴线分别位于基础六面体的 3 个互相垂直的表面内,且 3 条轴线互相垂直。当 3 对支链的直线移动驱动副轴线分别与动平台表面垂直(各对支链的两移动副轴线互相平行)时,该机构处于正交位姿<sup>[6]</sup>,且各支链的长度均为  $l_0$ 。应用文献[18]提出的修正 Grübler-Kutzbach 公式求

得机构的自由度为  $M = 6$ (过程从略)。

## 2 位置分析

定义当该正交并联机构各支链的位移输入均为零且处于正交位姿时的位姿为其初始状态位姿<sup>[6]</sup>,如图 1 所示。建立与动平台固结的坐标系  $r: Pxyz$ ,原点  $P$  位于动平台的几何中心,3 个坐标轴分别平行于动平台立方体的 3 个互相垂直的棱边;建立与基座固结的坐标系  $R: OXYZ$ ,且初始位姿时,定系  $R$  与动系  $r$  重合。其余未加说明的符号及其意义见图 1。各支链长度  $l_j \in [l_0 - \Delta l, l_0 + \Delta l]$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ),其中  $[-\Delta l, \Delta l]$  为直线驱动副的运动范围。

点  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 在定系  $R$  中的坐标矢量为

$$\begin{cases} {}^R\mathbf{A}_1 = [l_0 + a, 0, 0]^T \\ {}^R\mathbf{A}_2 = [0, l_0 + a, 0]^T \\ {}^R\mathbf{A}_3 = [0, 0, l_0 + a]^T \end{cases} \quad (1)$$

点  $B_{2i-1}, B_{2i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 在定系  $R$  中的坐标矢量为

$$\begin{cases} {}^R\mathbf{B}_{2i-1} = {}^R\mathbf{A}_i + d_{2i-1}\mathbf{e}_i \\ {}^R\mathbf{B}_{2i} = {}^R\mathbf{A}_i + d_{2i}\mathbf{e}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

式中  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ——沿  $Y, Z, X$  轴方向的单位矢量  
 $d_{2i-1}, d_{2i}$ ——点  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 到点  $B_{2i-1}, B_{2i}$  的距离(与定系  $R$  坐标轴正向同向时为正,反之为负)

为防止支链  $B_{2i-1}C_{2i-1}$  与  $B_{2i}C_{2i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的圆柱副发生干涉,圆柱副参考点  $B_{2i-1}$  与  $B_{2i}$  间具有距离约束

$$|d_{2i} - d_{2i-1}| \geq \Delta d \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

式中  $\Delta d$ ——根据圆柱副结构设定的距离阈值  
 参考点  $P$  在定系  $R$  中的坐标矢量为

$${}^R\mathbf{P} = [X_P, Y_P, Z_P]^T \quad (4)$$

点  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) 在动系  $r$  中的坐标矢量为

$$\begin{cases} {}^r\mathbf{C}_1 = [a, -b, 0]^T \\ {}^r\mathbf{C}_2 = [a, b, 0]^T \\ {}^r\mathbf{C}_3 = [0, a, -b]^T \\ {}^r\mathbf{C}_4 = [0, a, b]^T \\ {}^r\mathbf{C}_5 = [-b, 0, a]^T \\ {}^r\mathbf{C}_6 = [b, 0, a]^T \end{cases} \quad (5)$$

当用  $Z-Y-X$  型 Euler 角  $\alpha, \beta, \gamma$  描述动平台的旋转运动时,其姿态矩阵为

$${}^R\mathbf{M} = \text{Rot}(z, \alpha)\text{Rot}(y, \beta)\text{Rot}(x, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (6)$$

点  $C_j(j=1, 2, \dots, 6)$ 在定系  $R$  中的坐标矢量为

$${}^R\mathbf{C}_j = {}^R\mathbf{M}^T \mathbf{C}_j + {}^R\mathbf{P} \quad (j=1, 2, \dots, 6) \quad (7)$$

根据杆长约束条件,可得方程组

$$\| {}^R\mathbf{C}_j - {}^R\mathbf{B}_j \| = l_j \quad (j=1, 2, \dots, 6) \quad (8)$$

由于  $B_{2i-1}C_{2i-1} \perp e_i, B_{2i}C_{2i} \perp e_i \quad (i=1, 2, 3)$ ,

因此将式(1)、(2)、(4)~(7)代入式(8),并注意到

$$d_j = \begin{cases} Y_{B_j} = Y_{C_j} & (j=1, 2) \\ Z_{B_j} = Z_{C_j} & (j=3, 4) \\ X_{B_j} = X_{C_j} & (j=5, 6) \end{cases} \quad (9)$$

得

$$\begin{cases} l_1^2 = [a\cos\alpha\cos\beta - b(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma) + X_P - l_0 - a]^2 + (a\sin\beta - b\cos\beta\sin\gamma + Z_P)^2 \\ l_2^2 = [a\cos\alpha\cos\beta + b(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma) + X_P - l_0 - a]^2 + (a\sin\beta + b\cos\beta\sin\gamma + Z_P)^2 \\ l_3^2 = [a(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma) - b(\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma) + X_P]^2 + [a(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma) - b(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) + Y_P - l_0 - a]^2 \\ l_4^2 = [a(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma) + b(\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma) + X_P]^2 + [a(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma) + b(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) + Y_P - l_0 - a]^2 \\ l_5^2 = [a(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) - b\sin\alpha\cos\beta + Y_P]^2 + (a\cos\beta\cos\gamma + b\sin\beta + Z_P - l_0 - a)^2 \\ l_6^2 = [a(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) + b\sin\alpha\cos\beta + Y_P]^2 + (a\cos\beta\cos\gamma - b\sin\beta + Z_P - l_0 - a)^2 \end{cases} \quad (10)$$

已知动平台参考点  $P$  的坐标及 Euler 角时,由式(10)求出各驱动杆的长度即为位置反解。由于驱动杆长均为正值,故该机构仅有 1 组位置反解。

已知驱动杆的长度  $l_j(j=1, 2, \dots, 6)$ 时,由非线性方程组(10)求出动平台参考点  $P$  的坐标  $(X_P, Y_P, Z_P)$ 及 Euler 角  $(\alpha, \beta, \gamma)$ 即为位置正解。因方程组(10)的强耦合性,故其求解较困难。

### 3 基于反馈混沌化并联机构位置正解

#### 3.1 离散时间系统反馈混沌化的 Chen-Lai 算法

考虑一维非线性离散时间动力系统<sup>[15-17]</sup>

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) + u^{(k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

式中,  $x^{(k)} \in R$  为离散系统的状态,  $f: R \rightarrow R$  为一维连续可微映射,  $u^{(k)}$  为控制器。

考虑简单的线性反馈控制器

$$u^{(k)} = \sigma^{(k)} x^{(k)}$$

式中  $\sigma^{(k)}$ ——控制增益参数

则式(11)成为受控系统

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) + \sigma^{(k)} x^{(k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

系统式(12)的函数  $f(x)$  在点  $x^{(k)}$  处的 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{J}^{(k)}(x^{(k)}) = f'(x^{(k)}) + \sigma^{(k)}$$

令  $T^{(k)}(x^{(0)}) = T^{(k)}(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) =$

$$\prod_{h=0}^k \mathbf{J}^{(h)}(x^{(h)})$$

则受控系统的 Lyapunov 指数为<sup>[15]</sup>

$$\lambda(x^{(0)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |T^{(k)}(x^{(0)})| \quad (13)$$

若序列  $\{f'(x^{(k)})\}_{k=0}^{+\infty}$  一致有界,即存在正常数  $\Xi$ ,使得

$$\sup_{0 \leq k < \infty} |f'(x^{(k)})| \leq \Xi$$

取  $\sigma^{(k)} \equiv \Xi + e^\rho \quad (\rho > 0)$  (14)

式中  $\rho$ ——控制参数

则

$$\begin{aligned} |T^{(k)}(x^{(0)})| &= \prod_{h=0}^k |\mathbf{J}^{(h)}(x^{(h)})| = \\ &= \prod_{h=0}^k |f'(x^{(h)}) + \Xi + e^\rho| \end{aligned}$$

又

$$e^{k\rho} \leq \prod_{i=0}^k |f'(x^{(i)}) + \Xi + e^\rho| \leq (2\Xi + e^\rho)^k$$

故

$$\begin{aligned} 0 < \rho \leq \lambda(x^{(0)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |T^{(k)}(x^{(0)})| \leq \\ &= \ln(2\Xi + e^\rho) < \infty \end{aligned}$$

由上述可知,满足式(14)的受控系统的 Lyapunov 指数有界且为正,即受控系统式(12)是混沌的。由于混沌序列(式(12))中,可预先给定参数  $\rho$ ,使得 Lyapunov 指数  $\lambda \geq \rho$ ,达到强化混沌的目的。

考虑反馈混沌化 Logistic 映射

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= f(x^{(k)}) + \sigma^{(k)} x^{(k)} = \\ &= \mu x^{(k)}(1 - x^{(k)}) + \sigma^{(k)} x^{(k)} \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $\mu$ ——Logistic 映射的可调系数

对式(15)取模运算,是为了将混沌序列限制在  $[0, 1]$  范围内。当  $\mu = 4$  时, Logistic 映射的 Lyapunov 指数  $\lambda = 0.693 1$ 。当  $\mu = 4$  时,取  $\{f'(x^{(k)})\}_{k=0}^{+\infty}$  的上界  $\Xi = 4$ ,依次取  $\rho = 2, 3, 4, 5$ ,

经数值计算,得相应的反馈混沌化 Logistic 映射的 Lyapunov 指数  $\lambda = 2.415\ 5, 3.178\ 5, 4.070\ 4, 5.026\ 4$ 。由此可知,其 Lyapunov 指数远大于  $0.693\ 1$ , 即其混沌运动更强烈。当  $\mu = 4, \rho = 4$  时,在  $[0, 1]$  范围内随机生成  $x^{(0)}$ , 然后由式(15)迭代生成 100 个数据并舍弃,再由式(15)迭代生成 200 个数据,其分布如图 2 所示。由图 2 可知,反馈混沌化 Logistic 映射具有良好的遍历性。用同样的方法生成 10 000 个数据,其概率分布如图 3 所示。经反复试验可知,虽  $x^{(k)}$  不是均匀分布的,但小概率的范围较大,概率  $p$  基本处于区间  $[0.008, 0.012]$  内。

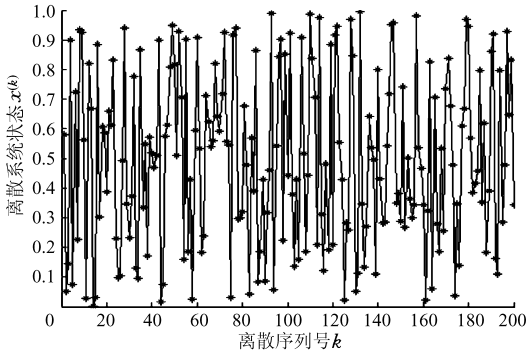


图 2 反馈混沌化 Logistic 映射的混沌轨道 ( $\mu = 4, \rho = 4$ )

Fig. 2 A chaotic orbit of the Logistic mapping of chaotification with  $\mu = 4$  and  $\rho = 4$

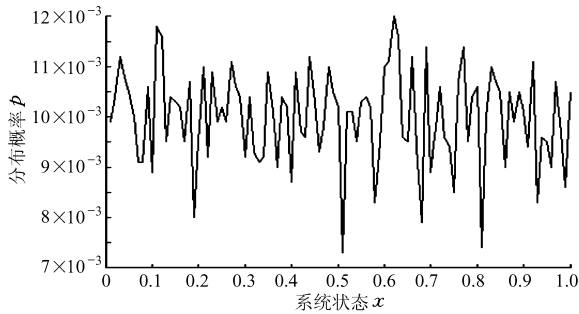


图 3 反馈混沌化 Logistic 映射的概率分布 ( $\mu = 4, \rho = 4$ )

Fig. 3 Probability distribution of the Logistic mapping of chaotification with  $\mu = 4$  and  $\rho = 4$

## 3.2 基于反馈混沌化 Newton 迭代法

### 3.2.1 Newton 迭代法

非线性方程组的一般形式为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})]^T = \mathbf{0} \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$  为  $N$  个待求的变元列阵,  $\Omega = \prod_{j=1}^N [x_j^L, x_j^U]$  为解空间,  $x_j^U, x_j^L (j=1, 2, \dots, N)$  为  $x_j$  的上、下限;  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^N$  为定义在  $\Omega$  上的  $N$  维向量值函数, 即  $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ 。

求解非线性方程组(16)的 Newton 迭代法的迭代格式为

$$\begin{cases} \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(n)})\Delta\mathbf{x}^{(n)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \\ \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \Delta\mathbf{x}^{(n)} \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(n)})$  为向量函数  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  在点  $\mathbf{x}^{(n)}$  处的 Jacobian 矩阵, 即

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(n)}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} =$$

$$[\nabla f_1(\mathbf{x}), \nabla f_2(\mathbf{x}), \dots, \nabla f_N(\mathbf{x})]^T \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}}$$

Newton 迭代法的收敛准则可取为

$$\sum_{j=1}^N f_j^2(\mathbf{x}^{(n)}) < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (18)$$

式中  $\varepsilon$ ——给定收敛精度

### 3.2.2 基于反馈混沌化 Logistic 映射的 Newton 迭代法

利用反馈控制混沌系统的良好遍历性在解空间生成多个点, 并以这些点作为初始点, 再用具有二阶收敛速的 Newton 迭代法求解非线性方程组, 算法简单, 容易实现, 能求出方程组的全部解, 将该算法称为 CBNIA。算法的计算流程如下:

(1) 设置初始参数, 包括方程组维数  $N$ 、混沌序列长度  $K$ 、变量  $x_j (j=1, 2, \dots, N)$  的取值范围  $[x_j^L, x_j^U]$  等。

(2) 随机生成  $[0, 1]$  范围内均匀分布的  $N$  个初值  $\mathbf{y}^{(0)} = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}]$ , 即  $y_j^{(0)} \sim U(0, 1) (j=1, 2, \dots, N)$ 。依次取  $1, 2, \dots, K_0$  (比如可取  $K_0 = 50$ ), 应用式(15)分别对  $y_j^{(k)}$  进行迭代, 生成混沌变量。为保证变量的遍历性, 先舍弃这些数, 再重新迭代生成 Newton 迭代法的初值。本文取  $\mu = 4, \rho = 4$ 。

(3)  $k$  依次取  $(K_0 + 1), (K_0 + 2), \dots, (K_0 + K)$ , 应用式(15)分别对  $y_j^{(k)}$  进行迭代, 生成  $K$  组混沌变量  $\mathbf{y}^{(k)}$ 。将  $\mathbf{y}^{(k)}$  自  $[0, 1]$  映射至解空间  $\Omega$ , 映射关系为

$$x_j^{(0,k)} = x_j^L + y_j^{(k)}(x_j^U - x_j^L) \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

(4) 依次以  $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0,k)}, x_2^{(0,k)}, \dots, x_N^{(0,k)}]^T$  为初值, 应用式(17)进行迭代, 即可求出非线性方程组式(16)的解。当  $K$  较大 (比如取  $K = 500$ ) 时, 可求出式(16)的全部解。

## 3.3 应用 CBNIA 求并联机构位置正解

应用 CBNIA 求 6-CPS 正交并联机器人机构的位置正解时, 在式(10)中, 待求变量的取值范围可设为  $X_P, Y_P, Z_P \in [-l_0 - 2a, l_0 + 2a], \alpha, \beta, \gamma \in [-\pi, \pi]$ 。由于并联机构的位置正解方程组式(10)存在多组解, 但同一动平台姿态可由多组共轭 Euler 角表示, 因此不能通过比较位置正解  $\mathbf{x} = [X_P, Y_P,$

$Z_P, \alpha, \beta, \gamma]^T$  来判定两组解是否为同一位置正解。

本文根据位置正解  $\mathbf{x}$  计算对应点  $D_i (i = 1, 2, 3)$  在定系中的坐标矢量组  ${}^R\mathbf{D}_i$ , 再比较两组坐标矢量  ${}^R\mathbf{D}_i$  来判定其是否同解。因此设置位置正解集  $\mathbf{S}$  存储已求得的位置正解  $\mathbf{x}$  和对应坐标矢量组  ${}^R\mathbf{D}_i$ 。

在 CBNIA 中, 以混沌序列作为初值, 求式 (10) 的解  $\mathbf{x}^*$  后, 若  $\mathbf{x}^*$  满足式 (18) 设定的精度要求, 则分别计算对应坐标矢量组  ${}^R\mathbf{D}_i^*$  与  $\mathbf{S}$  中所有坐标矢量组  ${}^R\mathbf{D}^{(\xi)}_i (\xi = 1, 2, \dots, |\mathbf{S}|; |\mathbf{S}|$  为  $\mathbf{S}$  中的解数目) 之间的 Euclidian 距离

$$\tau^{(\xi)} = \sum_{i=1}^3 \| {}^R\mathbf{D}_i^* - {}^R\mathbf{D}_i^{(\xi)} \| \quad (\xi = 1, 2, \dots, |\mathbf{S}|) \quad (19)$$

若矢量组  ${}^R\mathbf{D}_i^*$  与  $\mathbf{S}$  中第  $\xi_0$  组矢量组  ${}^R\mathbf{D}_i^{(\xi_0)}$  之间的 Euclidian 距离小于设定的精度阈值, 即  $\tau^{\xi_0} < \tau_0 (\tau_0 > 0, \text{为精度阈值})$ , 则认为  $\mathbf{x}^*$  与  $\mathbf{S}$  中的第  $\xi_0$  组解  $\mathbf{x}^{(\xi_0)}$  为同一组解, 并将之删除; 否则将  $\mathbf{x}^*$  及其

对应矢量组  ${}^R\mathbf{D}_i^*$  存入  $\mathbf{S}$  中。当连续若干次未找到新解时, 则认为已找出全部解,  $\mathbf{S}$  中的  $\mathbf{x}^{(\xi)} (\xi = 1, 2, \dots, |\mathbf{S}|)$  即为并联机构的全部位置正解。

### 4 实例

已知机构尺度参数  $a = 120 \text{ mm}, b = 100 \text{ mm}, l_0 = 500 \text{ mm}, \Delta l = 300 \text{ mm}, \Delta d = 50 \text{ mm}$ 。给定 6 根移动副驱动杆长:  $l_1 = 460 \text{ mm}, l_2 = 480 \text{ mm}, l_3 = 520 \text{ mm}, l_4 = 540 \text{ mm}, l_5 = 450 \text{ mm}, l_6 = 490 \text{ mm}$ , 求机构的位置正解。

基于 CBNIA, 应用 Matlab6.5 软件编程, 并取收敛精度  $\epsilon = 10^{-10}$ , Euclidian 距离精度阈值  $\tau_0 = 10^{-8}$ , 求得机构的 14 组 (全部) 实数位置正解如表 1 所示。

将表 1 中的每组位置正解作为已知位姿代入式 (10) 求位置反解, 其结果均与给定的驱动输入十分吻合, 说明本文的求解方法正确。

表 1 数字实例的 14 组实数位置正解  
Tab. 1 14 forward solutions of an example

组序	$X_P/\text{mm}$	$Y_P/\text{mm}$	$Z_P/\text{mm}$	$\alpha/(\circ)$	$\beta/(\circ)$	$\gamma/(\circ)$
1	337.666 797	82.566 162	275.447 648	5.751 695	-192.841 673	358.778 903
2	382.196 947	398.091 697	459.002 138	-167.573 862	177.380 205	-9.338 050
3	633.418 253	518.176 758	363.708 295	-114.776 397	-128.603 361	198.426 570
4	484.183 212	320.584 819	412.913 680	-187.962 988	8.402 554	169.023 039
5	195.811 297	73.718 506	219.206 233	268.215 887	-336.691 265	243.230 213
6	232.395 384	156.206 362	121.681 990	-62.291 076	-180.105 937	113.809 354
7	410.504 530	573.760 323	539.509 105	-174.918 889	115.978 507	274.898 386
8	33.826 827	-27.717 596	35.297 489	187.066 834	-192.162 569	-173.250 862
9	128.712 336	224.956 966	312.057 866	177.693 440	-193.968 665	-10.044 366
10	133.469 489	172.340 413	179.825 122	-246.455 606	153.571 846	271.786 791
11	583.192 138	355.773 407	579.169 516	-104.351 590	-260.641 543	194.711 766
12	276.668 923	273.711 073	105.689 876	-190.374 412	7.133 858	-13.311 001
13	551.875 973	481.729 569	475.896 314	11.352 896	-355.746 822	6.929 063
14	481.092 095	461.248 242	382.819 185	346.573 002	185.419 981	178.104 341
组序	$d_1/\text{mm}$	$d_2/\text{mm}$	$d_3/\text{mm}$	$d_4/\text{mm}$	$d_5/\text{mm}$	$d_6/\text{mm}$
1	-28.585 633	170.267 353	375.417 606	180.464 297	460.949 081	266.933 194
2	520.090 104	327.682 719	577.024 572	379.881 199	283.545 899	478.656 606
3	<b>568.824 817</b>	<b>603.487 074</b>	328.180 564	446.567 863	604.424 690	656.719 386
4	239.421 114	434.639 646	532.634 722	338.401 514	602.369 811	406.424 393
5	-73.147 282	0.278 487	162.176 173	79.446 706	<b>306.423 274</b>	<b>300.704 740</b>
6	<b>281.365 479</b>	<b>243.523 972</b>	-28.474 473	52.264 324	181.654 668	88.658 837
7	<b>578.988 409</b>	<b>577.843 009</b>	<b>595.621 521</b>	<b>588.140 878</b>	368.287 237	455.549 760
8	-112.142 969	85.571 508	-47.994 321	146.161 582	-36.534 505	157.491 011
9	318.827 204	121.713 280	427.923 640	236.812 814	2.405 989	196.334 317

续表

组序	$X_p/\text{mm}$	$Y_p/\text{mm}$	$Z_p/\text{mm}$	$\alpha/(\circ)$	$\beta/(\circ)$	$\gamma/(\circ)$
10	115.855 121	31.799 119	<b>290.024 230</b>	<b>284.439 875</b>	-12.923 673	58.618 979
11	326.427 542	422.927 910	<b>568.397 088</b>	<b>599.852 989</b>	<b>637.071 747</b>	<b>645.133 051</b>
12	391.390 854	198.915 891	-18.284 774	174.835 502	355.032 232	159.824 778
13	407.783 302	602.790 059	391.337 046	589.329 538	465.614 221	661.160 880
14	586.129 283	391.847 539	279.368 973	478.365 824	588.020 941	394.357 369

由式(3)可知,第 3、5~7、10、11 组解的支链间会发生圆柱副干涉(表 1 中黑体数据),应舍弃;其余各组解的支链间不发生干涉,但由初始正交位姿只能到达第 8、13 组解确定的位姿。

独立运行 CBNIA 50 次,在每次求解过程中,反馈混沌化 Logistic 映射平均迭代约 395 代(即以 395 个混沌序列点作为初值独立执行 395 次 Newton 迭代搜索)找到 14 组位置正解。根据文献[9]的研究结论,当在 Newton 迭代法的 Julia 点邻域中取足够密集的点作为迭代初值时,找出所有  $\Theta_{\text{zeros}} = 14$  个零

点理论上需至少独立运算  $\Theta_{\text{zeros}} \sum_{i=1}^{\Theta_{\text{zeros}}} (1/i) = 45.52 \approx 46$  次,即取 46 个初始点。本文的平均初始点数大约是理论值的 8.6 倍,而文献[9]的初始点数是理论值的 40 倍,可见本文的效率高得多。

## 5 结论

(1) 提出了一种新型 6 - DOF 6 - CPS 正交并联机器人机构,并根据杆长约束条件建立了位置正解方程组。

(2) 提出了一种新的基于混沌的 Newton 迭代法——CBNIA,即应用 Newton 迭代法求解非线性方程组时,以具有良好遍历性的反馈混沌化 Logistic 序列作为初始点,可快速求出方程组的全部解。

(3) 利用数值方法对机构的位置正反解进行了验证:给定 6 根移动副驱动杆长  $l_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ ,应用 CBNIA 求解机构正位置分析中的非线性方程组,得到了全部位置正解;再以每组位置正解作为已知位姿求位置反解(即驱动杆长),其结果均与给定的驱动输入十分吻合,证明本文的求解方法正确。

## 参 考 文 献

- 高小山, 廖启征. 由圆柱副, 圆柱副和球面副构成的并联机构: 中国, 200410073712.2[P]. 2005 - 03 - 23.
- Gao Xiaoshan, Lei Deli, Liao Qizheng, et al. Generalized Stewart-gough platforms and their direct kinematics[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005, 21(2): 141~151.
- 黄昔光, 廖启征, 李端玲, 等. 基于四元数的台体型 5SPS - 1CCS 并联机器人位置正解分析[J]. 机械工程学报, 2007, 43(5): 8~13.  
Huang Xiguang, Liao Qizheng, Li Duanling, et al. Forward displacement analysis of generalized 5SPS - 1CCS parallel robot mechanism based on quaternion[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(5): 8~13. (in Chinese)
- 黄昔光, 廖启征, 魏世民, 等. 台体型 4SPS - 2CCS 广义并联机构位置正解分析[J]. 北京邮电大学学报, 2007, 30(3): 15~18, 31.  
Huang Xiguang, Liao Qizheng, Wei Shimin, et al. Forward displacement analysis of the 4SPS - 2CCS generalized Stewart platform[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2007, 30(3): 15~18, 31. (in Chinese)
- 甘东明, 廖启征, 王品, 等. 新型 6 - CCS 并联机器人机构的运动学正解及仿真[J]. 中国机械工程, 2007, 18(24): 2 903~2 906.  
Gan Dongming, Liao Qizheng, Wang Pin, et al. Forward kinematics analysis and motion simulation of a new 6 - CCS parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(24): 2 903~2 906. (in Chinese)
- 金振林, 王军, 高峰. 新型 6 - PSS 并联机器人工作空间分析[J]. 中国机械工程, 2002, 13(13): 1 088~1 090.  
Jin Zhenlin, Wang Jun, Gao Feng. Workspace analysis of a novel 6 - PSS parallel manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(13): 1 088~1 090. (in Chinese)
- Jovanovic V T, Kazerounian K. Using chaos to obtain global solutions in computational kinematics[J]. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 1998, 120(2): 299~304.
- 谢进, 陈永. 基于混沌的刚体导引 Burmester 点的求解方法[J]. 中国机械工程, 2002, 13(7): 608~610.  
Xie Jin, Chen Yong. A chaos-based approach to obtain the global real solutions of Burmester points[J]. China Mechanical

- Engineering, 2002, 13(7): 608~610. (in Chinese)
- 9 冯春, 谢进, 陈永. 利用混沌与分形进行平面机构综合[J]. 中国机械工程, 2004, 15(9): 753~756.  
Feng Chun, Xie Jin, Chen Yong. Using chaos and fractals to synthesize planar mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(9): 753~756. (in Chinese)
- 10 冯春, 陈永. 基于混沌的全局优化新方法[J]. 机械工程学报, 2004, 40(2): 96~101.  
Feng Chun, Chen Yong. New global optimization method based on chaos and fractals[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(2): 96~101. (in Chinese)
- 11 刘健, 袁建平. 一种求解非线性方程组的混沌算法[J]. 哈尔滨商业大学学报: 自然科学版, 2001, 17(1): 31~34.  
Liu Jian, Yuan Jianping. A kind of chaos algorithm for solving nonlinear equation group[J]. Journal of Harbin Commercial University: Natural Science Edition, 2001, 17(1): 31~34. (in Chinese)
- 12 杨迪雄, 李刚, 程耿东. 非线性函数的混沌优化方法比较研究[J]. 计算力学学报, 2004, 21(3): 257~262.  
Yang Dixiong, Li Gang, Cheng Gengdong. Comparative study on chaos optimization algorithm for nonlinear function[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2004, 21(3): 257~262. (in Chinese)
- 13 罗佑新, 黎大志. 机构综合的变参数复合混沌系统方法[J]. 农业机械学报, 2008, 39(4): 168~171.  
Luo Youxin, Li Dazhi. Variable parameter compound chaotic system method and its application to mechanism synthesis [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(4): 168~171. (in Chinese)
- 14 车林仙, 罗佑新. 并联机构位置正解的基于 Hénon 混沌映射的 Newton 迭代法[J]. 机械设计, 2009, 26(1): 19~22.  
Che Linxian, Luo Youxin. Newton iterative method based on Hénon chaotic mapping for seeking the positional forward solution of parallel mechanism[J]. Journal of Machine Design, 2009, 26(1): 19~22. (in Chinese)
- 15 Chen Guanrong, Lai Dejian. Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems [J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 1996, 6(7): 1 341~1 349.
- 16 Chen Guanrong, Lai Dejian. Feedback anticontrol of discrete chaos[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 1998, 8(7): 1 585~1 590.
- 17 Wang Xiaofan, Chen Guanrong. On feedback anticontrol of discrete chaos[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 1999, 9(7): 1 435~1 441.
- 18 Dai Jian S, Huang Zhen, Lipkin Harvey. Mobility of overconstrained parallel mechanisms[J]. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 220~229.
- 19 陈红亮, 罗玉峰, 杨廷力. 对称三自由度并联机器人拓扑结构型综合与分类[J]. 农业机械学报, 2008, 39(1): 138~141.  
Chen Hongliang, Luo Yufeng, Yang Tingli. Structure design sort of parallel robot mechanism with symmetric 3-DOF[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(1): 138~141. (in Chinese)

(上接第 211 页)

- 7 Joshi S A, Tsai L-W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 254~258.
- 8 Gosselin C M, Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281~290.
- 9 陈红亮, 罗玉峰, 杨廷力. 对称三自由度并联机器人拓扑结构型综合与分类[J]. 农业机械学报, 2008, 39(1): 138~141.  
Chen Hongliang, Luo Yufeng, Yang Tingli. Structure design sort of parallel robot mechanism with symmetric 3-DOF[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(1): 138~141. (in Chinese)
- 10 张均富, 王进戈, 徐礼钜. 基于螺旋理论的球面并联机构动力学解析模型[J]. 农业机械学报, 2007, 38(4): 122~126.  
Zhang Junfu, Wang Jingge, Xu Liju. Analytical dynamic model for spherical parallel mechanisms based on screw theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2007, 38(4): 122~126. (in Chinese)