文章编号:1671-9352(2008)08-0035-03

具有纯正断面的正则半群的构造

袁志玲
(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 利用二元组(R,L)给出了具有纯正断面的正则半群的构造定理。

关键词: 正则半群;同态映射;纯正断面
中图分类号: O152.7　　**文献标志码:** A

Construction of regular semigroups with orthodox transversals

YUAN Zhi-ling
(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, Jiangsu, China)

Abstract: The construction theorem of regular semigroups with orthodox transversals was given by a simpler formal set (R,L).

Key words: regular semigroup; homomorphism; orthodox transversal

0 引言

最近20余年关于具有断面的正则半群的研究获得非常丰富的结果[1-5]。1982年, McAlister 和 McFadden, Blyth, T.S. 首先在文献[1,2]中介绍了半群的逆断面的概念并通过三元组获得了具有逆断面的正则半群 的结构定理。文献[5]与[6]是纯正断面研究的最新进展,[5]利用三元组研究了具有纯正断面的正则半群。本文利用更为简单的二元组(R,L)给出具有纯正断面的正则半群的构造定理。全文用 S 表示正则半群,而 $V(a)$表示正则半群 S 的元素 a 的逆元的集合。设 S^0 为 S 的子半群, 若 $a\in S$,记 $S^0\cap V(a)$为 $V_{S^0}(a)$。令 $I=\{aa^0: a\in S, a^0\in V_{S^0}(a)\}$和 $\Lambda=\{a^0a: a\in S, a^0\in V_{S^0}(a)\}$。称 S^0 为 S 的纯正断面,若下列条件成立:

(1.1) $(\forall a\in S)V_{S^0}(a)\neq\varnothing$;

(1.2) 若 $a,b\in S,\{a,b\}\cap S^0\neq\varnothing$;

(1.3) $S^0SS^0\subseteq S^0$。

引理 0.1　设 S 是正则半群, S^0 是 S 的纯正子半群, 则 I 和 Λ 是 S 的子带。

证明　设 $e,g\in I$。由于 $e^0,g^0\in E(S^0)$, 故 $g^0e^0eg=g^0e^0g=e^0g^0g=e^0g^0$,从而

$$(eg)^0eg=(eg)^0(eg)^{00}(eg)^0eg=(eg)^0(e)^{00}(g)^{00}(g)^0(e)^0eg=(eg)^0,$$

这样$(eg)(eg)^0=eg$。故 I 为子带。同理 Λ 也为子带。

引理 0.2　设 S 是正则半群,S^0 是 S 的纯正子半群。令

$$L=\{a\in S:(\forall a^0\in V_{S^0}(a))(\exists a^{0\prime}\in V_{S^0}(a^0))aa^0=a^{0\prime}a^0\},$$

$$R=\{a\in S:(\forall a^0\in V_{S^0}(a))(\exists a^{0\prime}\in V_{S^0}(a^0))a^0a=a^0a^{0\prime}\}。$$

则 L,R 是纯正半群且S^0 分别为它们的左理想纯正断面及右理想纯正断面。

收稿日期:2008-04-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10471112)
作者简介:袁志玲(1974-),女,硕士,讲师,研究方向为半群代数理论. Email: zhlyuan16@163.com

证明　因 $x^{00}\in V_{S^0}(x^0)$，故 $x^0\in V_{S^0}(x^{00})$，从而存在 $x^{000}\in V_{S^0}(x^{00})$使得 $x^0=x^{000}$。这样$S^0\subseteq L, S^0\subseteq R$。令 $x,y\in R$，由 S^0 为纯正断面，对任意的$(xy)^0\in V_{S^0}(xy)$，$y^0\in V_{S^0}(y)$，存在 $y^{0\prime}\in V_{S^0}(y)$使得$(xy)^0xy=(xy)^0xyy^0y=(xy)^0xyy^0y^{0\prime}\in S^0$。这样$(xy)^0xy\in S^0$ 且$(xy)^0xy\in R_{(xy)^0}$。由引理 0.1，存在$(xy)^{0\prime}\in V_{S^0}((xy)^0)$使得$(xy)^0xy=(xy)^0(xy)^{0\prime}$，从而 $xy\in R$，即 R 为 S 的子半群。令 $x\in R, y^0\in S^0$，则对任意的 $x^0\in V_{S^0}(x)$，存在 $x^{0\prime}\in V_{S^0}(x^0)$使得 $y^0x=y^0xx^0x=y^0xx^0x^{0\prime}\in S^0$，即 S^0 为 R 的右理想，类似地证明定理的另一半。

1　主要结果及证明

定理 1.1　设 L,R 是纯正半群，假设 L 和 R 有一个共同的纯正断面 S^0，令

$$R\times L\to L$$
$$(a,x)\mapsto a\cdot x$$

和

$$R\times L\to R$$
$$(a,x)\mapsto a*x$$

是映射，使得对任意的 $x,y\in L$ 和 $a,b\in R$，满足：

(1) $(a\cdot y)^0a^{00}a^0=y^0y^{00}(a*y)^0$；

(2) $a\cdot xx^0(b\cdot y)=(a\cdot x)(a\cdot x)^0((a*x)x^0b\cdot y)$ 和 $(a*x)x^0b*y=(a*xx^0(b\cdot y))(b*y)^0(b*y)$；

(3) $a\cdot x^0=a^{00}x^0$，$a*x^0=ax^0$，$a^0\cdot x=a^0x$ 和 $a^0*x=a^0x^{00}$。

在集合 $T=L|\times|R=\{(x,a)\in L\times R: x^0=a^0\}$上定义乘法：

$$(x,a)(y,b)=(xx^0(a\cdot y),(a*y)b^0b),$$

则 $T=L|\times|R$ 是具有纯正断面的正则半群，且其纯正断面与 S^0 同构。反之，任一个具有纯正断面的正则半群都可以通过上述方式构造。

下面通过一系列的引理证明定理的第一部分。

引理 1.1　T 中的乘法是有意义的。

证明　只需验证$(xx^0(a\cdot y),(a*y)b^0b)\in T$，即$(xx^0(aoy))^0=((a*y)b^0b)^0$。

因为

$$(xx^0(a\cdot y))^0=(a\cdot y)^0x^{00}x^0=(a\cdot y)^0a^{00}a^0=y^0y^{00}(a*y)^0=$$
$$b^0b^{00}(a*y)^0=((a*y)b^0b)^0,$$

所以$(xx^0(a\cdot y),(a*y)b^0b)\in T$，即 T 中的乘法是有意义的。

引理 1.2　T 是半群。

证明　$\forall(x,a),(y,b),(z,c)\in T$，则

$$\begin{aligned}[(x,a)(y,b)](z,c)=&[(xx^0(a\cdot y),(a*y)b^0b)](z,c)=\\&(xx^0(a\cdot y)(a\cdot y)^0x^{00}x^0[(a*y)b^0b\cdot z],[(a*y)b^0b*z]c^0c)=\\&(xx^0x^{00}x^0(a\cdot y)(a\cdot y)^0[(a*y)b^0b\cdot z],(a*yb^0(b\cdot z))(b*z)^0(b*z)c^0c),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}(x,a)[(y,b)(z,c)]=&(x,a)[yy^0(b\cdot z),(b*z)c^0c]=\\&(xx^0(a\cdot y)(a\cdot y)^0((a*y)y^0b\cdot z),(a*yy^0(b\cdot z))(b*z)^0(b*z)c^0c)。\end{aligned}$$

所以$[(x,a)(y,b)](z,c)=(x,a)[(y,b)(z,c)]$。从而 T 是半群。

引理 1.3　T 是正则半群。

证明　$\forall(x,a)\in T$，$\exists(x^0,x^0)\in S^0|\times|S^0$，满足：

$$\begin{aligned}(x,a)(x^0,x^0)(x,a)=&(xx^0(ax^0\cdot x),(ax^0*x)a^0a)=\\&(xx^0ax^0x,ax^0xa^0a)=(x,a),\end{aligned}$$

从而 T 是正则半群。

引理 1.4　$W=S^0|\times|S^0=\{(r,r):r\in S^0\}$，则 W 是 T 的纯正子半群且和 S^0 同构。

证明　显然 W 是 T 的子半群，只需证明 $E(W)$ 是带。对任意的 $e,f\in E(W)$，显然 $(e,e)(f,f)=(ef,ef)$。而 $(f,f)(e,e)=(fe,fe)$，又因 S^0 是纯正子半群，所以 $ef\in E^0$ 且 $ef=fe$，从而 $(e,e)(f,f)=(f,f)(e,e)$，所以 $E(W)$ 是带，即 W 是 T 的纯正子半群。定义 $\phi:W\to S^0,(r,r)\mapsto r$，则易证 ϕ 是同构映射，所以 W 和 S^0 同构。

引理 1.5　W 是 T 的纯正断面。

证明　由引理 1.4 和 1.3 知，对任意的 $(x,a)\in T$，存在 $(x^0,x^0)\in S^0$ 使得 $(x^0,x^0)(x,a)(x^0,x^0)=(x^0x^{00}(x^0\cdot x),(x^0*x)a^0a)(x^0,x^0)=(x^0x(x^0x)^0((x^0a)\cdot x^0),(x^0a*x^0)x^{00}x^0)=(x^0,x^0)$，所以，$(x^0,x^0)\in V_{S^0}(x,a)$，从而 W 是 T 的纯正断面。

到目前为止,已经完成了定理的第一部分的证明,下面证明定理的剩余部分。

设 S 是正则半群，S^0 是 S 的纯正断面。则 S 必同构于 $T=L|\times|R$，其中 $L=\{a\in S:(\forall a^0\in V_{S^0}(a))(\exists a^{0\prime}\in V_{S^0}(a^0))aa^0=a^{0\prime}a^0\}$，$R=\{a\in S:(\forall a^{0\prime}\in V_{S^0}(a))(\exists a^0\in V_{S^0}(a^0))a^0a=a^0a^{0\prime}\}$。由于 S^0 是 S 的纯正断面，从而定理中的 L 和 R 分别是具有公共纯正断面 S^0 的左和右纯正半群。$I(S)=\{e\in S|e=ee^0\}$ 和 $\Lambda(S)=\{f\in S|f=f^0f\}$，显然 $E(L)=I(S)$，$E(R)=\Lambda(S)$。令 $(a,x)\mapsto a\cdot x=a^{00}x,(a,x)\mapsto a*x=ax^{00}$，则得到 $R\times L$ 到 L 和 $R\times L$ 到 R 的映射，直接验证可知 条件(1),(2),(3)成立，由定理 1.1 的直接部分得到一个具有同构于 S^0 的纯正断面的正则半群 $L|\times|R$，以下证明 S 同构于 $L|\times|R$。设

$$\begin{aligned}\phi:\ &S\to L|\times|R\\ &s\mapsto(ss^0s^{00},s^{00}s^0s),\end{aligned}$$

显然 $ss^0s^{00}\in L,s^{00}s^0s\in R$，且 $(ss^0s^{00})^0=s^0=(s^{00}s^0s)^0$。故 $(ss^0s^{00},s^{00}s^0s)\in L\times R$，所以 ϕ 是映射。对于 $s,t\in S$，若 $(ss^0s^{00},s^{00}s^0s)=(tt^0t^{00},t^{00}t^0t)$，则 $ss^0s^{00}=tt^0t^{00},s^{00}s^0s=t^{00}t^0t$，故 $s^0=(ss^0s^{00})^0=(tt^0t^{00})^0=t^0$。于是有 $ss^0=ss^0s^{00}s^0=tt^0t^{00}t^0=tt^0$ 和 $s^0s=s^0s^{00}s^0s=t^0t^{00}t^0t=t^0t$。故 $s=ss^0s^{00}s^0s=tt^0t^{00}t^0t=t$，所以 ϕ 是单射。对于任意 $(x,a)\in L|\times|R$，有 $x^0=a^0,x^0x=x^0x^{00},a^0a=a^0a^{00}$，令 $s=xx^0a$，则有 $ss^0s^{00}=xx^0a(xx^0a)^0(xx^0a)^{00}=xx^0ax^0x^{00}=xx^0x=x$，和 $s^{00}s^0x=(xx^0a)^{00}(xx^0a)^0xx^0a=x^{00}x^0xx^0a=x^{00}x^0a=a^{00}a^0a=aa^0a=a$。从而 $s\phi=(ss^0s^{00},s^{00}s^0s)=(x,a)$，所以 ϕ 是满射。易证对任意的 $(s,t)\in S$，有 $(s\phi)(t\phi)=(st)\phi$。故 ϕ 是 S 到 $L|\times|R$ 的同构，即 $S\cong L\times R$。

参考文献:

[1] BLYTH T S, MCFADDEN R B. Regular semigroups with a multiplicative inverse transversal[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1982, 92A: 253-270.
[2] MCALISTER D B, MCFADDEN R B. Regular semigroups with inverse transversals[J]. Q J Math Oxford, 1989, 34(2):41-51.
[3] SAITO T. Construction of regular semigroups with inverse transversals[J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1989, 32:41-51.
[4] BLYTH T S, ALMEDIA M H, SATONS. A simplistic approach to inverse transversals[J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1996, 39:57-69.
[5] KONG Xiangjun. Regular semigroups with quasi-ideal orthodox transversals[J]. Semigroup Forum, 2007, 74:247-258.
[6] 曹勇. 关于线性变换正则序半群的 BQ 性[J]. 山东大学学报:理学版, 2008, 43(2):98-100.

(编辑:李晓红)