第44卷 第10期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009年10月
Vol.44 No.10 Journal of Shandong University(Natural Science) Oct. 2009

文章编号:1671-9352(2009)10-0030-06

亏秩线性方程组的PSD迭代解法

岳强,畅大为*
(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

摘要:将亏秩线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 增广为以方阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 为系数矩阵的 4×4 块线性 方程组 $\hat{\boldsymbol{A}}\eta=\boldsymbol{b}'$,再对 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 进行次正则 PSD 分裂,得到 PSD 迭代法半收敛的一个充要条件。最后给出求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 范数最小的最小二乘解的方法并以实例说明,其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{b}\in\mathbf{C}^{m}$,$\boldsymbol{b}'\in\mathbf{C}^{m+n}$。

关键词:PSD分裂;半收敛;最小二乘解;Moore-Penrose广义逆
中图分类号:O241.6 **文献标志码**:A

Preconditioned simultaneous displacement(PSD) method for rank deficient linear systems

YUE Qiang, CHANG Da-wei*
(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China)

Abstract: The rank deficient linear system $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ is augmented to a block 4×4 linear system $\hat{\boldsymbol{A}}\eta=\boldsymbol{b}'$ where $\hat{\boldsymbol{A}}$ is a square matrix, then $\hat{\boldsymbol{A}}$ is split with PSD subproper splitting. The necessary and sufficient condition for the PSD method being semiconvergent is obtained. Finally a method is provided to compute the least square solution of minimal norm to $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ and exmamples are given to illustrate the process, where $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbf{C}^{m}$, $\boldsymbol{b}'\in\mathbf{C}^{m+n}$.

Key words: PSD splitting; Semiconvergent; Least square solution; Moore-Penrose generalized inverse

1 引言和预备知识

求解线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{1.1}$$

一般情况下 $\boldsymbol{A}$ 为方阵且对角线元素不为零,于是对 $\boldsymbol{A}$ 进行不同的分裂可得到多种迭代方法,诸如高斯迭代法(GS)、超松弛法(SOR)、快速超松弛法(AOR)、对称超松弛法(SSOR)、预条件同时置换法(PSD)等等。这些方法已被众多学者进行了深入的研究。在 $\boldsymbol{A}$ 亏秩的情形下,即 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$ 且 $r<\min\{m,n\}$,V.A.Miller 和 M.Neumann 基于 A.Berman 和 R.J.Plemmons 对次正则分裂的工作[1],于1987年首先讨论了用SOR迭代解决亏秩线性方程组的问题[2]。近年来,文献[3-6]分别用不同的分裂方法讨论了AOR和SSOR迭代法求解亏秩线性方程组。

本文将通过对 $\boldsymbol{A}$ 进行次正则 PSD 分裂,求解亏秩线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。在后文论述中,设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,则 $\boldsymbol{A}^*$,$N(\boldsymbol{A})$,$R(\boldsymbol{A})$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$,$\sigma(\boldsymbol{A})$和 $\rho(\boldsymbol{A})$分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置,零空间,象空间,$\boldsymbol{A}$ 的秩,谱和谱半径。$\mathrm{index}(\boldsymbol{A})$表示使 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^n)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{n+1})$成立的最小正整数 n,$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i|^2)^{\frac{1}{2}}$。

收稿日期:2009-03-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60671063)
作者简介:岳强(1984-),男,硕士,主要从事数值线性代数的研究.Email:yqttt@163.com
* **通讯作者**:畅大为(1963-),男,副教授,主要从事数值线性代数的研究. Email:dwch@263.net

定义 1.1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 称作 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆当它满足如下条件:(1) $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$;(2) $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$;(3) $(\boldsymbol{AX})^{*}=\boldsymbol{AX}$;(4) $(\boldsymbol{XA})^{*}=\boldsymbol{XA}$。

$\boldsymbol{A}$ 的此广义逆记为 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$,$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 一定存在且惟一,则 $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ 是线性方程组(1.1)范数最小的最小二乘解。

定义 1.2　若将 $\boldsymbol{A}$ 分裂为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$, 得到迭代 $\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^{k}+\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{b}$,称此分裂为次正则分裂当 $R(\boldsymbol{A})\subseteq R(\boldsymbol{M})$ 且 $N(\boldsymbol{M})\subseteq N(\boldsymbol{A})$。

引理 1.1[7]　设线性方程组(1.1)相容,即 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$。若分裂 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 是次正则分裂,则对任意初值 $\boldsymbol{x}_0$,迭代 $\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^{k}+\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ 收敛当且仅当迭代阵 $\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{N}$ 半收敛,即:

(ⅰ) $\rho(\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{N})\leqslant 1$;(ⅱ) 当 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{N})$ 且 $|\lambda|=1$ 时有 $\lambda=1$;(ⅲ) $\operatorname{index}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{N})\leqslant 1$。

众所周知,$\forall\,\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$,$\boldsymbol{y}\in\mathbf{C}^{n}$ 是线性方程组(1.1)的最小二乘解,即 $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|_2=\min\limits_{x\in\mathbf{C}^n}\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}x\|_2$ 当且仅当剩余向量 $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{*}\delta\boldsymbol{r}=0$。不失一般性,我们假设 $\boldsymbol{A}$ 具有形式 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_{11}\in\mathbf{C}_r^{r\times r}$,$\boldsymbol{A}_{12}\in\mathbf{C}^{r\times(n-r)}$, $\boldsymbol{A}_{21}\in\mathbf{C}^{(m-r)\times r}$,$\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$,$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1^{*},\boldsymbol{y}_2^{*})^{*}$,$\delta\boldsymbol{r}=(\delta\boldsymbol{r}_1^{*},\delta\boldsymbol{r}_2^{*})^{*}$,$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1^{*},\boldsymbol{b}_2^{*})^{*}$,$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{b}_1,\delta\boldsymbol{r}_1\in\mathbf{C}^{r}$,$\boldsymbol{b}_2,\delta\boldsymbol{r}_2\in\mathbf{C}^{m-r}$,$\boldsymbol{y}_2\in\mathbf{C}^{n-r}$。则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}_2+\delta\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}_2+\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{b}_2,\\ \boldsymbol{A}_{21}^{*}\delta\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{A}_{11}^{*}\delta\boldsymbol{r}_1=0,\\ \boldsymbol{A}_{22}^{*}\delta\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{A}_{12}^{*}\delta\boldsymbol{r}_1=0,\end{cases}\tag{1.2}$$

该方程组可简记为:$\hat{\boldsymbol{A}}\eta=\boldsymbol{b}'$, 其中

$$\eta=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \delta\boldsymbol{r}_2\\ \delta\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{I}_{m-r} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{21}^{*} & \boldsymbol{A}_{11}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}^{*} & \boldsymbol{A}_{12}^{*} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^{(m+n)\times(m+n)}。$$

根据(1.2)式,知道线性方程组 $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'$ 是相容的,将通过如下引理得到线性方程组(1.1)的最小二乘解。

引理 1.2[2]　设 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^{m+n}$ 是线性方程组(1.2)的一个解,其中 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_3\in\mathbf{C}^{r}$,$\boldsymbol{u}_2\in\mathbf{C}^{m-r}$,$\boldsymbol{u}_4\in\mathbf{C}^{n-r}$,则向量 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}$ 是线性方程组(1.1)的最小二乘解。特别地,$\boldsymbol{u}=\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\boldsymbol{b}'$ 当且仅当 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$。

2　PSD 分裂及主要结果

现在来看线性方程组 $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'$,将 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 作如下分裂:

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{I}_{m-r} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{11}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_{21}^{*} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_{22}^{*} & -\boldsymbol{A}_{12}^{*} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_r & -\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_{22}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}\equiv\boldsymbol{D}-\widetilde{\boldsymbol{L}}-\widetilde{\boldsymbol{U}}。$$

显然,$\boldsymbol{D}$ 是非奇异矩阵。令 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{L}}$,$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{D}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{U}}$, 则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的 PSD 分裂为:

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{L})(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{U})}{\tau}-\frac{\boldsymbol{D}[(1-\tau)\boldsymbol{I}+(\tau-\omega)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})+\omega^2\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}]}{\tau},\tau\neq 0,\omega\neq 1。\tag{2.1}$$

因为 $\boldsymbol{L}$ 是严格下三角阵,$\omega\neq 1$ 保证了 $\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{U}$ 非奇异, 所以矩阵 $\dfrac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{L})(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{U})}{\tau}$ 也非奇异,而 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 是奇异阵, 根据定义 1.2,(2.1)是一个次正则分裂,本文称其为次正则 PSD 分裂。

由分裂(2.1)得到迭代:

$$x^{k+1} = H_{\tau,\omega}x^k + c, \tag{2.2}$$

其中 $H_{\tau,\omega} = (I-\omega U)^{-1}(I-\omega L)^{-1}[(1-\tau)I + (\tau-\omega)(L+U) + \omega^2 LU]$, $c = \tau(I-\omega U)^{-1}(I-\omega L)^{-1}D^{-1}b'$。经过计算可得:

$$H_{\tau,\omega} = \begin{pmatrix} (1-\tau)I_r & \omega\tau(1-\omega)(A_{11}^{-1}B^* + CA_{22}^*) & T_1 & -\tau C \\ O & (1-\tau)I_{m-r} + \omega\tau(\omega-1)BB^* & \tau(1-\omega)B - \omega^2\tau BB^*B & O \\ O & \tau(\omega-1)B^* & (1-\tau)I_r - \omega\tau B^*B & O \\ O & \tau(\omega-1)A_{22}^* & -\omega\tau A_{22}^*B - \tau A_{12}^* & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

$$c = \tau\begin{pmatrix} T_2 & \omega^2 A_{11}^{-1}B^* + \omega^2 CA_{22}^* & \dfrac{\omega^2}{1-\omega}CC^* - \omega A_{11}^{-1}(A_{11}^*)^{-1} & \dfrac{\omega}{\omega-1}C \\ \omega^2 BB^*B - B & I_{m-r} - \omega^2 BB^* & \omega B(A_{11}^*)^{-1} & O \\ \omega B^*B & -\omega B^* & (A_{11}^*)^{-1} & O \\ \omega A_{22}^*B & -\omega A_{22}^* & \dfrac{\omega}{\omega-1}C^* & \dfrac{1}{1-\omega}I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $B = A_{21}A_{11}^{-1}$, $C = A_{11}^{-1}A_{12}$, $T_1 = \tau(\omega-1)A_{11}^{-1} + \omega^2\tau A_{11}^{-1}B^*B + \omega^2\tau CA_{22}^*B + \omega\tau CA_{12}^*$,

$T_2 = A_{11}^{-1} - \omega^2 A_{11}^{-1}B^*B - \omega^2 CA_{22}^*B$。

显然 $\sigma(H_{\tau,\omega}) = \{1-\tau, 1\} \cup \sigma(T_{\tau,\omega})$, $T_{\tau,\omega} = \begin{pmatrix} (1-\omega)I_{m-r} + \omega\tau(\omega-1)BB^* & \tau(1-\omega)B - \omega^2\tau BB^*B \\ \tau(\omega-1)B^* & (1-\tau)I_r - \omega\tau B^*B \end{pmatrix}$。

接下来考虑矩阵

$$S = \begin{pmatrix} I & -B \\ B^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & O \\ -B^* & O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix} \equiv I - L_s - U_s,$$

由上式分裂可知,矩阵 S 的 PSD 迭代矩阵为:

$(I-\omega U_s)^{-1}(I-\omega L_s)^{-1}[(1-\tau)I + (\tau-\omega)(L_s+U_s) + \omega^2 L_sU_s] =$

$\begin{pmatrix} (1-\omega)I_{m-r} + \omega\tau(\omega-1)BB^* & \tau(1-\omega)B - \omega^2\tau BB^*B \\ \tau(\omega-1)B^* & (1-\tau)I_r - \omega\tau B^*B \end{pmatrix} = T_{\tau,\omega}$。$S$ 是(1,1)相容次序矩阵且其 Jacobi 迭代阵为 $J_s = \begin{pmatrix} O & B \\ -B^* & O \end{pmatrix}$, J_s 的所有特征值均为纯虚数或零,并且 $\rho(J_s) = \|B\|_2 = \bar{\mu}$, 那么矩阵 S 满足如下引理的条件。

引理 2.1[8] 若线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 为(1,1)相容次序矩阵且对角元素全不为零,其 Jacobi 迭代矩阵的特征值 μ_i 为纯虚数或零且 $\underline{\mu} = \min_i \|\mu_i\|$, $\bar{\mu} = \max_i \|\mu_i\|$,则当且仅当 τ 和 ω 满足下列条件时,PSD 迭代法收敛:

(Ⅰ) $\underline{\mu} \neq 0$,则:

(ⅰ) $\dfrac{-2}{\sqrt{1+\bar{\mu}^2}} < \tau < 0$, $1-\omega_\tau^{(3)} < \omega < 1-\omega_\tau^{(1)}$ 或 $1+\omega_\tau^{(1)} < \omega < 1+\omega_\tau^{(3)}$;

(ⅱ) $0 < \tau < \dfrac{2}{1+\underline{\mu}^2}$, $1-\omega_\tau^{(2)} < \omega < 1+\omega_\tau^{(2)}$;

(ⅲ) $\dfrac{2}{1+\bar{\mu}^2} \leqslant \tau < \dfrac{2}{\sqrt{1+\bar{\mu}^2}}$, $1-\omega_\tau^{(2)} < \omega < 1-\omega_\tau^{(3)}$ 或 $1+\omega_\tau^{(3)} < \omega < 1+\omega_\tau^{(2)}$;

(Ⅱ) $\underline{\mu} = 0$,且 $\bar{\mu} \neq \underline{\mu}$, τ 和 ω 取(Ⅰ)中的(ⅱ)和(ⅲ);

(Ⅲ) $\bar{\mu} = \underline{\mu} = 0$, $0 < \tau < 2$, ω 任取。

其中 $\omega_\tau^{(1)} = \dfrac{\sqrt{\underline{\mu}^2 + 2 - (1+\underline{\mu}^2)\tau}}{\underline{\mu}}$, $\omega_\tau^{(2)} = \dfrac{\sqrt{\bar{\mu}^2 + 2 - (1+\bar{\mu}^2)\tau}}{\bar{\mu}}$, $\omega_\tau^{(3)} = \sqrt{\dfrac{-\frac{1}{2}(1+\bar{\mu}^2)\tau^2 + (2+\bar{\mu}^2)\tau - 2}{\tau\bar{\mu}^2}}$。

引理 2.2[9] 若线性方程组系数矩阵 A 为(1,1)相容次序矩阵,则其 PSD 迭代矩阵的特征值 λ 与其 Jacobi 迭代矩阵的特征值 μ 有如下关系：

$$(\lambda-1+\tau)^2=\tau\mu^2[\omega(2-\omega)(\lambda-1)+\tau]。\tag{2.3}$$

由引理 2.1 有 $\rho(\boldsymbol{T}_{\tau,\omega})<1$ 的充要条件,可进一步得到如下结论：

定理 2.1　设 $\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}$为矩阵$\hat{\boldsymbol{A}}$ 的次正则 PSD 分裂迭代矩阵，则 $\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}$半收敛的充要条件为：

(Ⅰ) $\underline{\mu}\neq 0$；则：

(ⅰ) $0<\tau<\dfrac{2}{1+\bar{\mu}^2}$, $1-\omega_\tau^{(1)}<\omega<1+\omega_\tau^{(1)}$ 且 $\omega\neq 1$；

(ⅱ) $\dfrac{2}{1+\bar{\mu}^2}\leqslant\tau<\dfrac{2}{\sqrt{1+\bar{\mu}^2}}$, $1-\omega_\tau^{(1)}<\omega<1-\omega_\tau^{(2)}$或　$1+\omega_\tau^{(2)}<\omega<1+\omega_\tau^{(1)}$；

(Ⅱ) $\underline{\mu}=0$,且 $\bar{\mu}\neq\underline{\mu}$, τ 和 ω 取(Ⅰ)中的(1)和(2)；

(Ⅲ) $\bar{\mu}=\underline{\mu}=0$, $0<\tau<2$, ω 取不为 1 的任何实数。

其中 μ_i 是矩阵 $\boldsymbol{J}_s=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的特征值, $\underline{\mu}=\min\limits_i|\mu_i|$, $\bar{\mu}=\max\limits_i|\mu_i|$, $\omega_\tau^{(1)}=\dfrac{\sqrt{\bar{\mu}^2+2-(1+\bar{\mu}^2)\tau}}{\bar{\mu}}$, $\omega_\tau^{(2)}=\sqrt{\dfrac{-\frac{1}{2}(1+\bar{\mu}^2)\tau^2+(2+\bar{\mu}^2)\tau-2}{\tau\bar{\mu}^2}}$。

证明　根据前面的讨论, $\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}$半收敛等价于以下条件成立：

(ⅰ) $\rho(\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})\leqslant 1$；(ⅱ) 若 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})$且$|\lambda|=1$,则 $\lambda=1$；(ⅲ) $\mathrm{index}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})\leqslant 1$。

首先证明(ⅲ)。$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}$有满秩分解：

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}=\tau^4\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{m-r}+\omega(1-\omega)\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^* & (\omega-1)\boldsymbol{B}+\omega^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & (1-\omega)\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{I}_r+\omega\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & (1-\omega)\boldsymbol{A}_{22}^* & \omega\boldsymbol{A}_{22}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_{12}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=$$

$$\tau^4\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{m-r} & \omega\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{12}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{m-r} & -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & (1-\omega)\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{I}_r+\omega\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\equiv\boldsymbol{F}\boldsymbol{G},$$

其中 $\boldsymbol{P}=\omega(\omega-1)(\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_{22}^*)$, $\boldsymbol{Q}=(1-\omega)\boldsymbol{A}_{11}^{-1}-\omega^2\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}-\omega^2\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_{22}^*\boldsymbol{B}-\omega\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_{22}^*\boldsymbol{B}-\omega\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_{12}^*$。根据 Cline 理论[10], $\mathrm{index}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})\leqslant 1$ 当且仅当 $\det(\boldsymbol{G}\boldsymbol{F})\neq 0$。然而

$$\det(\boldsymbol{G}\boldsymbol{F})=\det(\tau^4\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{m-r} & -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & (1-\omega)\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{I}_r+\omega\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{m-r} & \omega\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{12}^*\end{pmatrix})=$$

$$\det(\tau^4\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{P} & \omega\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_{12}^*\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{m-r} & (\omega-1)\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & (1-\omega)\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{I}_r+\omega(2-\omega)\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\end{pmatrix})=\tau^{4(m+r)}\det(\boldsymbol{I}_r+\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})\neq 0,$$

因此(ⅲ)得证。

接下来证明(ⅰ)和(ⅱ)。设 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}_{\tau,\omega})$,由引理 2.2 的(2.3)式知 $\lambda\neq 1$，由$\sigma(\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})=\{1-\tau,1\}\cup\sigma(\boldsymbol{T}_{\tau,\omega})$知条件(ⅰ)和(ⅱ)等价于 $\rho(\boldsymbol{T}_{\tau,\omega})<1$ 且 $0<\tau<2$。结合引理 2.1,命题得证。

定理 2.2　若 $z(\boldsymbol{x}_0)$是迭代(2.2)由初值 $\boldsymbol{x}_0$ 得到的一解,则：

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^\dagger(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_0)=\hat{\boldsymbol{A}}^\dagger\boldsymbol{b}。$$

证明类似于文献[6]。

根据 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}$的满秩分解$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$ 知，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^\dagger=\boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^*)^{-1}(\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^*$, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^\dagger(\boldsymbol{I}-$

$\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}) = \boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^*)^{-1}(\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^*)^{-1}\boldsymbol{G}$,经过计算可得到:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^{\dagger}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix},$$

因此,在计算$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^{\dagger}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})$时只需求得 $\boldsymbol{C}$ 和$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}$。

为通过 PSD 迭代法求解亏秩线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解,总结出如下步骤:

(1) 根据 $\boldsymbol{A}$ 的分块写出 $\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}$,再由迭代(2.2)求得解 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_0)$;

(2) 由定理 2.2 计算 $\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\boldsymbol{b}'$;

(3) 最后由引理 1.2 求得 $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}$。

3 数值举例

例 1 线性方程组$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$,其范数最小的最小二乘解为$\begin{pmatrix}0.5\\0.75\\0.75\end{pmatrix}$。

将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}=\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{A}_{12}$, $\sigma(\boldsymbol{J}_s)=\{i,-i\}$, $\underline{\mu}=1$, $\bar{\mu}=1$。

$$\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}=\begin{pmatrix} 1-\tau & 0 & \omega\tau(1-\omega) & 0 & \tau(\omega-1)+\omega^2\tau & 0 & 0 \\ 0 & 1-\tau & 0 & 2\omega\tau(1-\omega) & 0 & 2\omega^2\tau+2\omega\tau-\tau & -\tau \\ 0 & 0 & 1-\tau+\omega\tau(\omega-1) & 0 & \tau-\tau\omega-\omega^2\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\tau+\omega\tau(\omega-1) & 0 & \tau(1-\omega)-\omega^2\tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau(\omega-1) & 0 & 1-\tau-\omega\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau(\omega-1) & 0 & 1-\tau-\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau(\omega-1) & 0 & -\omega\tau-\tau & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}=\tau\begin{pmatrix}1-\omega^2\\2-2\omega^2\\\omega^2-1\\\omega^2-1\\\omega\\\omega\\\omega\end{pmatrix},(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^{\dagger}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0.5&0&0&0&0&0.5\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0.5&0&0&0&0&0.5\end{pmatrix},$$

取 $\omega=0.57$, $\tau=0.8$, $x_0=(0\,0\,0\,0\,0\,0)^{\mathrm{T}}$,只经过 5 次迭代便可得到

$$\boldsymbol{z}(x_0)=\begin{pmatrix}0.5000\\0.9999\\-0.5000\\-0.5000\\0.5000\\0.5000\\0.5000\end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix}0.5000\\0.7500\\-0.5000\\-0.5000\\0.5000\\0.5000\\0.7500\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0.5000\\0.7500\\0.7500\end{pmatrix}。$$

例 2　线性方程组 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其范数最小的最小二乘解为 $\begin{pmatrix}1\\0.25\\0.25\end{pmatrix}$。

将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{A}_{21}^{*}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{22}=1$，$\sigma(\boldsymbol{J}_s)=\{0,i,-i\}$，$\underline{\mu}=0$，$\bar{\mu}=1$，

$$\boldsymbol{H}_{\tau,\omega}=\begin{pmatrix}1-\tau&0&0&\tau(\omega-1)&0&0\\0&1-\tau&2\omega\tau(1-\omega)&0&2\omega^2\tau+2\omega\tau-\tau&-\tau\\0&0&1-\tau+\omega\tau(\omega-1)&0&\tau-\tau\omega-\omega^2\tau&0\\0&0&0&1-\tau&0&0\\0&0&\tau(\omega-1)&0&1-\tau-\omega\tau&0\\0&0&\tau(\omega-1)&0&-\omega\tau-\tau&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}=\tau\begin{pmatrix}1\\2\omega^2\\1-\omega^2\\0\\-\omega\\-\omega\end{pmatrix},\quad(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})^{\dagger}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\tau,\omega})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0.5&0&0&0&0.5\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0.5&0&0&0&0.5\end{pmatrix},$$

取 $\omega=0.5,\tau=0.8,x_0=(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$,经过 8 次迭代,可得

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}1.0000\\1.0000\\0.5000\\0.0000\\-0.5001\\-0.5001\end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix}1.0000\\0.2500\\0.5000\\0.0000\\-0.5001\\0.2500\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1.0000\\0.2500\\0.2500\end{pmatrix}。$$

参考文献：

[1] BERMAN A, PLEMMONS R J. Cones and iterative methods for best least squares solutions of linear systems[J]. SIAM J Numer Anal, 1974, 11:145-154.
[2] MILLER V A, NEUMANN M. Succesive overrelaxation methods for solving the rank deficient linear squares problem[J]. Linear Algebra Appl, 1987, 88-89:533-557.
[3] TIAN Hongjiong. Accelerated overrelaxation methods for deficient linear systems[J]. Appl Math Computat, 2003, 140:485-499.
[4] ZHENG Bing, WANG Ke. On accelerate overrelaxation methods for rank deficient linear systems[J]. Appl Math Computat, 2006, 173:951-959.
[5] ZHENG Bing, WANG Ke. Symmetric successive overrelaxation methods for solving the rank deficient linear least squares problem[J]. Appl Math Computat, 2005, 169:1305-1323.
[6] DARVISHI M T, KHOSRO-AGHDAM R. Symmetric successive overrelaxation methods for rank deficient linear systems[J]. Appl Math Computat, 2006, 173:404-420.
[7] NEUMANN M. Subproper splitting for rectangular matrices[J].Linear Algebra Appl, 1976, 14:41-51.
[8] 林喜梅,畅大为,陈军刚.预条件同时置换(PSD)迭代法的收敛性分析[J].高等学校计算数学学报,2008,30(2):117-132.
[9] 胡家赣.线性代数方程组的迭代解法[M].北京:科学出版社,1999:40-43.
[10] CLINE R E.Inverses of rank invariant powers of a matrix[J].SIAM J Numer Anal, 1968, 5:182-197.

（编辑：陈丽萍）