文章编号:1671-9352(2008)06-0025-03

模糊商李超代数

陈文娟

(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:利用模糊理想定义了模糊商李超代数,证明了模糊商李超代数是李超代数,讨论了模糊商李超代数的模糊子集。

关键词:李超代数;模糊商李超代数;模糊理想

中图分类号:O159　　**文献标志码**:A

Fuzzy-quotient Lie super-algebras

CHEN Wen-juan

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The fuzzy-quotient Lie super-algebra was defined by using a fuzzy ideal. The result shows the fuzzy-quotient Lie super-algebra is Lie super-algebra. Also, the fuzzy subset of fuzzy-quotient Lie super-algebra was discussed.

Key words: Lie super-algebras; fuzzy-quotient Lie super-algebras; fuzzy ideals

模糊理想是最早出现在模糊代数里的概念,也是最重要的概念之一。1996年,Yehia首先定义了李代数上的模糊理想[1],随后,Kim,Dong证明了李代数上的模糊理想关于sup-min积是封闭的[2], Yehia讨论了两类特殊的模糊理想[1,3]:可解模糊理想和幂零模糊理想。李超代数作为李代数的推广由Kac构造[4],李超代数与李代数的结构的不同之处在于李超代数有一个$\mathbf{Z}_2$-分次的结构。在本文中,作者定义$\mathbf{Z}_2$-分次模糊向量子空间,在此基础上,给出李超代数上模糊理想的定义,证明了所有模糊陪集做成的集合是李超代数,称为模糊商李超代数,进一步研究模糊商李超代数的模糊理想。

1 预备知识

设g是域k上的李超代数。函数$\mu: g \to [0,1] = I$称为g的模糊子集。把所有这样的模糊子集组成的集合记为I^g。设μ,η是g的模糊子集,定义$(\mu+\eta)(x) = \sup\limits_{a+b=x}\{\mu(a)\wedge\eta(b)\}$,对任意的$x\in g$。下面介绍几个文中用到的符号。$a\wedge b = \min\{a,b\}$, $a\vee b = \max\{a,b\}$,$(\mu\cap\eta)(x) = \mu(x)\wedge\eta(x)$,$1_x$表示在$x$处取值为1,其他取值为0的模糊子集。关于李超代数的内容请参见[4,5]。

2 主要结论

定义2.1[1]　设μ,η是g的模糊子集,如果$\mu\cap\eta = 1_0$,称$\mu+\eta$是直和记为$\mu\oplus\eta$。

定义2.2　设μ是g的模糊子集。如果μ满足条件$\mu(x+y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$和$\mu(\alpha x)\geqslant\mu(x)$,对任意的$x,y\in g$和$\alpha\in k$,称$\mu$为$g$的模糊向量子空间。

收稿日期:2008-01-18

作者简介:陈文娟(1981-),女,博士研究生,主要研究方向为代数表示和模糊代数.Email: wjchen_math@yahoo.com.cn

根据这个定义，可以得到对任意的 $x\in g$，有 $\mu(0)\geqslant\mu(x)$。本文总是假设 $\mu(0)=1$。

定义 2.3　设 μ 是 $g=g_{\bar 0}\oplus g_{\bar 1}$ 的模糊子集且 $\mu_{\bar 0},\mu_{\bar 1}$ 分别是 $g_{\bar 0},g_{\bar 1}$ 的模糊向量子空间。

定义
$$\mu'_{\bar 0}(x)=\begin{cases}\mu_{\bar 0}(x), & x\in g_{\bar 0},\\ 0, & x\notin g_{\bar 0},\end{cases}\quad \mu'_{\bar 1}(x)=\begin{cases}\mu_{\bar 1}(x), & x\in g_{\bar 1},\\ 0, & x\notin g_{\bar 1},\end{cases}$$
则 $\mu'_{\bar 0}$是 g 的模糊向量子空间。

而且有
$$(\mu'_{\bar 0}\cap\mu'_{\bar 1})(x)=\mu'_{\bar 0}(x)\wedge\mu'_{\bar 1}(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0。\end{cases}$$
所以 $\mu'_{\bar 0}\cap\mu'_{\bar 1}=1_0$。因此，$\mu'_{\bar 0}+\mu'_{\bar 1}$是直和记为 $\mu_{\bar 0}\oplus\mu_{\bar 1}$。如果 μ 是$g=g_{\bar 0}\oplus g_{\bar 1}$的模糊向量子空间，并且 $\mu=\mu_{\bar 0}\oplus\mu_{\bar 1}$，则称 μ 是g 的 $\mathbf{Z}_2$-分次模糊向量子空间。

定义 2.4　设 μ 是g 的模糊子集。如果它满足以下条件：(1)μ 是 $\mathbf{Z}_2$-分次模糊向量子空间；(2)对任意的 $x,y\in g$，有 $\mu([x,y])\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$，称 μ 为g 的模糊李子超代数。

定义 2.5　设 μ 是g 的模糊子集。如果它满足以下条件：(1)μ 是 $\mathbf{Z}_2$-分次模糊向量子空间；(2)对任意的 $x,y\in g$，有 $\mu([x,y])\geqslant\mu(x)\vee\mu(y)$，称 μ 为g 的模糊(李)理想。

例 2.1　设 $g=g_{\bar 0}\oplus g_{\bar 1}$是李超代数，其中 $g_{\bar 0}=\mathbf{R}^3$，$g_{\bar 1}=0$ 和对任意的 $x,y\in g_{\bar 0}$，$[x,y]=x\times y$，$\times$是 corss 积，其他元素的括号积都为 0。

定义 $\mu_{\bar 0}:g_{\bar 0}\rightarrow[0,1]$ 为
$$\mu_{\bar 0}((x,y,z))=\begin{cases}1, & \text{如果 } x=y=z=0,\\ 0.6, & \text{如果 } x\neq 0,y=z=0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

定义 $\mu_{\bar 1}:g_{\bar 1}\rightarrow[0,1]$ 为 $\mu_{\bar 1}(x)=1$。

则扩展 $\mu_{\bar 0},\mu_{\bar 1}$得到
$$\mu'_{\bar 0}:\ g\rightarrow[0,1]\text{为 }\mu'_{\bar 0}(x)=\begin{cases}\mu_{\bar 0}(x), & x\in g_{\bar 0},\\ 0, & x\notin g_{\bar 0},\end{cases}\quad \mu'_{\bar 1}:\ g\rightarrow[0,1]\text{为 }\mu'_{\bar 1}(x)=\begin{cases}\mu_{\bar 1}(x), & x\in g_{\bar 1},\\ 0, & x\notin g_{\bar 1}。\end{cases}$$

定义 $\mu:g\rightarrow[0,1]$ 为 $\mu(x)=\mu'_{\bar 0}(x)$，则 $\mu=\mu_{\bar 0}\oplus\mu_{\bar 1}$，这是因为 $(\mu'_{\bar 0}+\mu'_{\bar 1})(x)=\sup\limits_{x=a+b}\{\mu'_{\bar 0}(a)\wedge\mu'_{\bar 1}(b)\}=\mu_{\bar 0}(x_{\bar 0})\wedge\mu_{\bar 1}(x_{\bar 1})=\mu(x)$，且 $\mu'_{\bar 0}\cap\mu'_{\bar 1}=1_0$。

则 μ 是模糊李子超代数。然而，μ 不是g 的模糊理想，因为
$$\mu([(1,0,0),(1,1,1)])=\mu_{\bar 0}([(1,0,0),(1,1,1)])=\mu_{\bar 0}((0,-1,1))=0,$$
而
$$\max\{\mu((1,0,0)),\mu((1,1,1))\}=\max\{\mu_{\bar 0}((1,0,0)),\mu_{\bar 0}((1,1,1))\}=0.6。$$

设 μ 是g 的模糊理想。定义模糊子集 $x+\mu:g\rightarrow[0,1]$为$(x+\mu)(y)=\mu(y-x)$，称其为模糊理想 μ 的模糊陪集。记 g/μ 为所有这样的模糊陪集组成的集合。

引理 2.1　设 μ 是g 的模糊理想。则对任意的 $x,y\in g$，有 $x+\mu=y+\mu\Leftrightarrow\mu(x-y)=\mu(0)$。

证明　设 $x+\mu=y+\mu$。则对任意的 $x\in g$，有$(x+\mu)(x)=(y+\mu)(x)$。所以，
$$\mu(0)=\mu(y-x)=\mu(x-y)。$$

反之，如果有 $\mu(0)=\mu(x-y)$，则
$$(x+\mu)(z)=\mu(z-x)=\mu(z-y+y-x)\geqslant\mu(z-y)\wedge\mu(y-x),$$
所以 $x+\mu\supseteq y+\mu$。同样的方法，有 $y+\mu\supseteq x+\mu$。因此，$x+\mu=y+\mu$。

在集合 g/μ 上定义运算，对任意的 $x+\mu,y+\mu\in g/\mu$，$\alpha\in k$，定义：
$$(x+\mu)+(y+\mu)=(x+y)+\mu,\ \alpha(x+\mu)=\alpha x+\mu,\ [(x+\mu),(y+\mu)]=[x,y]+\mu。$$
这样的定义是合理的。因为，设 $x,y,u,v\in g$ 且设 $x+\mu=u+\mu$，$y+\mu=v+\mu$。则有 $\mu(x-u)=\mu(y-v)=\mu(0)$，推得，$\mu(x+y-u-v)\geqslant\mu(x-u)\wedge\mu(y-v)=\mu(0)$。因此，$\mu(x+y-u-v)=\mu(0)$。由引理 2.1 知，$x+y+\mu=u+v+\mu$。

其次，$\mu(\alpha x-\alpha u)=\mu(\alpha(x-u))\geqslant\mu(x-u)=\mu(0)$，因此，有 $\alpha x+\mu=\alpha u+\mu$。

最后，
$$\mu([u,v]-[x,y])=\mu([u,v]-[u,y]+[u,y]-[x,y])=$$
$$\mu([u,v-y]+[u-x,y])\geqslant\mu([u,v-y])\wedge\mu([u-x,y])\geqslant$$

$$(\mu(u)\vee\mu(v-y))\wedge(\mu(u-x)\vee\mu(y))=\mu(0)。$$

因此,有$[x,y]+\mu=[u,v]+\mu$。运算的合理性得到证明。根据李超代数的定义,可以证明 g/μ 是李超代数,称为模糊商李超代数。

定理 2.1 设 μ 是 g 的模糊理想,则 $g/\mu\cong g/\mu_0$,其中,$\mu_0=\{x\in g\mid\mu(x)=\mu(0)\}$是 g 的理想。

证明 定义 $f:g\to g/\mu$ 为 $x\mapsto x+\mu$,则 f 是 g 到 g/μ 的满同态。

设 $x\in g$。有 $x\in\ker f\Leftrightarrow x+\mu=\mu$。由引理 2.1 知道,$x+\mu=\mu\Leftrightarrow\mu(x)=\mu(0)\Leftrightarrow x\in\mu_0$。所以,$g/\mu\cong g/\mu_0$。

既然 g/μ 是一个李超代数,那么可以考虑它的模糊子集。

设 μ 是 g 的模糊理想,定义 $\mu^{(*)}:g/\mu\to[0,1]$ 为 $\mu^{(*)}(x+\mu)=\mu(x)$,对任意的 $x\in g$。

引理 2.2 以上定义的 $\mu^{(*)}$是合理的。

证明 设 $x+\mu=y+\mu$,则对任意的 $x\in g$,有$(x+\mu)(x)=(y+\mu)(x)$。故

$$\mu(0)=\mu(x-x)=\mu(y-x)=\mu(x-y)。$$

又因为 $$\mu(x)=\mu(x-y+y)\geqslant\mu(x-y)\wedge\mu(y)=\mu(y),$$

而且 $$\mu(y)=\mu(y-x+y)\geqslant\mu(y-x)\wedge\mu(x)=\mu(x),$$

所以 $\mu(x)=\mu(y)$。因此,$\mu^{(*)}(x+\mu)=\mu^{(*)}(y+\mu)$。

定理 2.2 设 μ 是 g 的模糊理想,则 $\mu^{(*)}$是 g/μ 的模糊理想。

证明 设 $x+\mu,y+\mu\in g/\mu$ 和 $\alpha\in k$。由

$$\mu^{(*)}(x+\mu+y+\mu)=\mu^{(*)}(x+y+\mu)=\mu(x+y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)=\mu^{(*)}(x+\mu)\wedge\mu^{(*)}(y+\mu),$$

和 $$\mu^{(*)}(\alpha(x+\mu))=\mu^{(*)}(\alpha x+\mu)=\mu(\alpha x)\geqslant\mu(x)=\mu^{(*)}(x+\mu),$$

得到 $\mu^{(*)}$是 g/μ 的模糊向量子空间。

下面证明 $\mu^{(*)}$具有 $\mathbf{Z}_2$-分次的结构。因为 μ 是 g 的模糊理想,μ 具有 $\mathbf{Z}_2$-分次的结构,所以 $\mu=\mu_{\bar{0}}\oplus\mu_{\bar{1}}$,其中 $\mu_{\bar{0}}\in I^{g_{\bar{0}}}$,$\mu_{\bar{1}}\in I^{g_{\bar{1}}}$。

定义$\mu_{\bar{0}}^{(*)}:g_{\bar{0}}/\mu\to[0,1]$ 为 $x+\mu\mapsto\mu_{\bar{0}}(x)$ 对任意的 $x\in g_{\bar{0}}$,

$\mu_{\bar{1}}^{(*)}:g_{\bar{1}}/\mu\to[0,1]$为 $x+\mu\mapsto\mu_{\bar{1}}(x)$对任意的 $x\in g_{\bar{1}}$,

显然这样定义的 $\mu_{\bar{0}}^{(*)}$,$\mu_{\bar{1}}^{(*)}$分别是 $g_{\bar{0}}/\mu$,$g_{\bar{1}}/\mu$ 的模糊向量子空间。

对任意的 $x\in g$,定义 $\mu^{(*)}{}'_{\bar{0}}:g/\mu\to[0,1]$ 为 $x+\mu\mapsto\mu'_{\bar{0}}(x)$,

$$\mu^{(*)}{}'_{\bar{1}}:g/\mu\to[0,1]\text{为 }x+\mu\mapsto\mu'_{\bar{1}}(x)。$$

则 $\mu^{(*)}{}'_{\bar{0}}$,$\mu^{(*)}{}'_{\bar{1}}$都是 g/μ 的模糊向量子空间。

对任意的 $x+\mu\in g/\mu$,有 $\mu^{(*)}(x+\mu)=\mu(x)=\mu_{\bar{0}}(x_{\bar{0}})\wedge\mu_{\bar{1}}(x_{\bar{1}})=\mu_{\bar{0}}^{(*)}(x_{\bar{0}}+\mu)\wedge\mu_{\bar{1}}^{(*)}(x_{\bar{1}}+\mu)=\sup\limits_{(a+\mu)+(b+\mu)=x+\mu}\{\mu^{(*)}{}'_{\bar{0}}(a+\mu)\wedge\mu^{(*)}{}'_{\bar{1}}(b+\mu)\}=(\mu^{(*)}{}'_{\bar{0}}+\mu^{(*)}{}'_{\bar{1}})(x+\mu)$。

而且由 $\mu_{\bar{0}}\cap\mu_{\bar{1}}=1_0$ 知,$\mu^{(*)}{}'_{\bar{0}}\cap\mu^{(*)}{}'_{\bar{1}}=1_0$。所以,$\mu^{(*)}=\mu_{\bar{0}}^{(*)}\oplus\mu_{\bar{1}}^{(*)}$。这就证明了 $\mu^{(*)}$是 $\mathbf{Z}_2$-分次模糊向量子空间。

设 $x+\mu,y+\mu\in g/\mu$。则有

$$\mu^{(*)}([x+\mu,y+\mu])=\mu^{(*)}([x,y]+\mu)=\mu([x,y])\geqslant\mu(x)\vee\mu(y)=\mu^{(*)}(x+\mu)\vee\mu^{(*)}(y+\mu)。$$

综上,$\mu^{(*)}$是 g/μ 的模糊理想。

参考文献:

[1] YEHIA Samy EI-Badawy. Fuzzy ideals and fuzzy subalgebras of Lie algbras[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80:237-244.
[2] KIM Chung-Gook, LEE Dong-Soo. Fuzzy Lie ideals and fuzzy Lie subalgebras[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94:101-104.
[3] YEHIA Samy El-Badawy. The adjoint representation of fuzzy Lie algebras[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119:409-417.
[4] KAC V G. Lie superalgebras[J]. Advances in Mathematics, 1977, 26:8-26.
[5] WAKIMOTO Minoru. Infinte-dimensional Lie algebras[M]. Providence: American Mathematical Society, 2001.

(编辑:李晓红)