文章编号:1671-9352(2009)10-0021-05

图有哈密顿(g,f)-因子的度条件

王超[1,2]

(1. 山东大学威海分校数学与统计学院，山东 威海 264200；
2. 山东大学数学学院，山东 济南 250100)

摘要:设 G 是一个 n 阶 2-连通图,整数 a,b 满足 $2\leqslant a<b$, $g(x)$和 $f(x)$是定义在 $V(G)$上的两个非负整数值函数,使得$\forall x\in V(G)$,满足 $a\leqslant g(x)<f(x)\leqslant b$。证明了 G 有哈密顿(g,f)-因子，如果 G 的最小度数满足：$\delta(G)\geqslant\frac{(b-1)^2-(a-1)(b-a)}{a-1}$, $n>\frac{(a+b-3)(a+b-2)}{a-1}$，且 $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\frac{(b-1)n}{a+b-2}$对 G 中任意两个不相邻的顶点 x,y 都成立。

关键词:图;(g,f)-因子;哈密顿(g,f)-因子
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**: A

A degree condition for graphs to have Hamiltonian (g,f)-factors

WANG Chao[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Shandong University at Weihai, Weihai 264200, Shandong, China;
2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: Let G be a 2-connected graph of order n, and let a and b be integers such that $2\leqslant a<b$, and let $g(x)$ and $f(x)$ be two nonnegative integer-valued functions defined on $V(G)$ such that $a\leqslant g(x)<f(x)\leqslant b$ for each $x\in V(G)$. It is proved that G has a Hamiltonian (g,f)-factor if the minimum degree of G satisfies the following conditions, $\delta(G)\geqslant\frac{(b-1)^2-(a-1)(b-a)}{a-1}$, $n>\frac{(a+b-3)(a+b-2)}{a-1}$, and $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\frac{(b-1)n}{a+b-2}$ for any two nonadjacent vertices x and y in G.

Key words: graph; (g,f)-factor; Hamiltonian (g,f)-factor

0 引言

本文所讨论的图都是简单连通无向的有限图。图 G 的顶点集、边集分别用 $V(G)$和 $E(G)$表示。对图 G 的任意一个顶点 x,用 $d_G(x)$表示 x 在图 G 中的度,$N_G(x)$表示图 G 中所有跟 x 相邻的顶点集合。记 $N_G[x]=N_G(x)\cup\{x\}$。对任意 $S\subseteq V(G)$,定义 $N_G(S)=\bigcup_{x\in S}N_G(x)$。$\delta(G)$表示图 G 的最小度。$\alpha(G)$表示图 G 的独立数。对任意的 $S\subseteq V(G)$,用 $G-S$ 表示用从 G 中删除 S 中的顶点以及所有与 S 中的顶点相关联的边而得到的子图。

令 $g(x)$和 $f(x)$是定义在 $V(G)$上的两个非负整数值函数,使得$\forall x\in V(G)$,满足 $g(x)\leqslant f(x)$。如果图 G 的一个支撑子图 F 满足 $g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$对于所有的 $x\in V(G)$成立,则图 F 称为图 G 的一个(g,f)-因子。如果图 G 的一个(g,f)-因子 F 包含一个哈密顿圈,则 F 称为图 G 的哈密顿(g,f)-因子。如果

收稿日期:2009-04-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10871119);高等学校博士学科点专项基金资助课题(200804220001)
作者简介:王超(1984-),女,硕士研究生,主要研究方向为图论.Email:wangchao6012@163.com

$g(x)\equiv a$，$f(x)\equiv b$，那么哈密顿(g,f)-因子则称为哈密顿$[a,b]$-因子。如果 $a=b=k$，那么哈密顿$[a,b]$-因子则称为哈密顿 k-因子。其它未说明的定义和术语请参考文献[1]。

很多学者研究了(g,f)-因子[2-5]，分数(g,f)-因子[6,7]，连通(g,f)-因子，哈密顿(g,f)-因子[8]，下面是一个关于(g,f)-因子的结果。

定理 1[5]　设 G 是一个 n 阶连通图，$f(x)$是定义在 $V(G)$上的一个非负整数值函数，使得$\forall x\in V(G)$，满足 $1\leqslant a\leqslant f(x)\leqslant b$，其中 $n\geqslant(a+b)$。如果 $f(V(G))$是偶数，且满足 $\delta(G)\geqslant\dfrac{bn}{(a+b)}$，$\alpha(G)\leqslant\dfrac{4a(\delta-b)}{(b+1)^2}$，那么 G 有一个连通的$(f,f+1)$-因子。

1　主要结果及其证明

本文的主要结果是给出一个图有哈密顿(g,f)-因子的充分条件。下面给出主要定理及其证明。

定理 2　设 G 是一个 n 阶 2-连通图，整数 a,b 满足 $2\leqslant a<b$，令 $g(x)$和 $f(x)$是定义在 $V(G)$上的两个非负整数值函数，使得$\forall x\in V(G)$满足 $a\leqslant g(x)<f(x)\leqslant b$。如果 G 满足：

$$\delta(G)\geqslant\frac{(b-1)^2-(a-1)(b-a)}{a-1},\quad n>\frac{(a+b-3)(a+b-2)}{a-1},$$

且 G 中任意两个不相邻的顶点 x,y，有$\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\dfrac{(b-1)n}{a+b-2}$，则 G 有一个哈密顿(g,f)-因子。

为了方便，对定义在 $V(G)$上的任意函数 f，记 $f(S)=\sum_{x\in S}f(x)$，其中 $S\subseteq V(G)$。

为了证明主要定理，需要如下引理。

引理 1[9]（范氏定理）　设 G 是一个 n 阶 2-连通图，若对于任何使 $d(u,v)=2$ 的顶点对$\{u,v\}$，有$\max\{d_G(u),d_G(v)\}\geqslant\dfrac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图。其中 $d(u,v)$表示顶点 u 和 v 的距离。

引理 2[10]　设 G 是一个图，令 $g(x)$和 $f(x)$是定义在 $V(G)$上的两个整数值函数，使得$\forall x\in V(G)$，满足 $g(x)<f(x)$，则 G 有一个(g,f)-因子当且仅当对 $V(G)$中任意两个不相交的子集 S,T 满足：$\delta_G(S,T)=f(S)+d_{G-S}(T)-g(T)\geqslant0$。

定理 2 的证明　假设 G 满足定理的条件。因为 G 是 n 阶 2-连通图，且对 G 中任意不相邻的两个顶点 x,y，有 $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\dfrac{(b-1)n}{a+b-2}>\dfrac{n}{2}$（因 $b>a$，由引理 1 知，G 有哈密顿圈 C。令 $G^*=G-E(C)$，为了证明定理，由引理 2，只需要证明 G^* 有一个$(g-2,f-2)$-因子即可。为简单起见，令

$$f^*(x)=f(x)-2,\ g^*(x)=g(x)-2,\ a^*=a-2,\ b^*=b-2,$$

则有

$$0\leqslant a^*\leqslant g^*(x)<f^*(x)\leqslant b^*,$$

$$\delta(G)\geqslant\frac{(b^*+1)^2-(a^*+1)(b^*-a^*)}{a^*+1},$$

$$n>\frac{(a^*+b^*+1)(a^*+b^*+2)}{a^*+1}。$$

下面用反正法来证明定理。假设 G^* 满足引理 2 的条件，但是 G^* 不存在(g^*,f^*)-因子。由引理 2，存在 $V(G^*)$的两个不相交子集 S,T，满足

$$\delta_{G^*}(S,T)=f^*(S)+d_{G^*-S}(T)-g^*(T)\leqslant-1。\tag{1}$$

选择满足式(1)并使得$|T|$最小的子集 S,T。

首先证明下面的断言。

断言 1　$d_{G^*-S}(x)<g^*(x)\leqslant b^*-1$，$\forall x\in T$ 成立。

如果$\exists x_0\in T$，使得 $d_{G^*-S}(x_0)\geqslant g^*(x_0)$，则 S 和 $T\setminus\{x_0\}$仍然满足(1)式。这与 S,T 的选取方式矛盾。因此

$$d_{G^*-S}(x)<g^*(x)\leqslant b^*-1 \tag{2}$$

对所有的 $x\in T$ 成立。

断言 2　$d_{G-S}(x)\leqslant d_{G^*-S}(x)+2\leqslant b^*$,对所有的 $x\in T$ 成立。

因为 $G=G^*\cup E(C)$,所以 $d_{G-S}(x)\leqslant d_{G^*-S}(x)+2\leqslant b^*$,对所有的 $x\in T$ 成立。

断言 3　$|T|\geqslant a^*+2$。

如果$|T|\leqslant a^*+1$,则由(1),以及

$|S|+d_{G-S}(x)\geqslant d_G(x)\geqslant\delta(G)\geqslant\dfrac{(b^*+1)^2-(a^*+1)(b^*-a^*)}{a^*+1}\geqslant b^*+1$ 对任意的 $x\in T$ 成立,有

$$-1\geqslant\delta_{G^*}(S,T)=f^*(S)+d_{G^*-S}(T)-g^*(T)\geqslant(a^*+1)|S|+\sum_{x\in T}(d_{G-S}(x)-2)-(b^*-1)|T|\geqslant$$
$$|T||S|+d_{G-S}(T)-2|T|-(b^*-1)|T|=\sum_{x\in T}(|S|+d_{G-S}(x)-(b^*+1))\geqslant 0。$$

矛盾,所以$|T|\geqslant a^*+2$。

由断言 3,$T\neq\varnothing$,所以可以定义 $h_1=\min\{d_{G-S}(x)|x\in T\}$。取 $x_1\in T$,满足$d_{G-S}(x_1)=h_1$,令$d_{G^*-S}(x_1)=h_1^*$,则 $h_1^*\leqslant h_1\leqslant h_1^*+2$,由断言 1,$0\leqslant h_1{}^*<g^*(x)\leqslant b^*-1$。即

$$0\leqslant h_1{}^*\leqslant b^*-2。\tag{3}$$

由断言 2,

$$0\leqslant h_1\leqslant b^*。\tag{4}$$

下面分两种情况讨论。

情况 1　$T=N_T[x_1]$。

由断言 3 和(4),

$$|T|=|N_T[x_1]|\leqslant d_{G-S}(x_1)+1=h_1+1\leqslant b^*+1, \tag{5}$$
$$h_1\geqslant a^*+1。\tag{6}$$

根据(1),(6),$|S|+h_1=|S|+d_{G-S}(x_1)\geqslant d_G(x_1)\geqslant\delta(G)\geqslant\dfrac{(b^*+1)^2-(a^*+1)(b^*-a^*)}{a^*+1}$,$|T|\leqslant b^*+1$,以及 h_1 的定义,

$$-1\geqslant\delta_{G^*}(S,T)=f^*(S)+d_{G^*-S}(T)-g^*(T)\geqslant(a^*+1)|S|+\sum_{x\in T}(d_{G-S}(x)-2)-(b^*-1)|T|=$$
$$(a^*+1)|S|+d_{G-S}(T)-(b^*+1)|T|\geqslant(a^*+1)|S|+h_1|T|-(b^*+1)|T|\geqslant$$
$$(a^*+1)\left(\frac{(b^*+1)^2-(a^*+1)(b^*-a^*)}{a^*+1}-h_1\right)-(b^*+1-h_1)(b^*+1)=$$
$$-(a^*+1)(b^*-a^*)-(a^*+1)h_1+h_1(b^*+1)=(b^*-a^*)(h_1-a^*-1)\geqslant 0。$$

矛盾。

情况 2　$T\neq N_T[x_1]$。

显然有 $T\setminus N_T[x_1]\neq\varnothing$,那么定义 $h_2=\min\{d_{G-S}(x)|x\in T\setminus N_T[x_1]\}$,令 $x_2\in T\setminus N_T[x_1]$,满足 $d_{G-S}(x_2)=h_2$,由断言 2,有 $0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant b^*$ 成立。

令 $d_{G^*-S}(x_2)=h_2{}^*$,则 $h_2{}^*\leqslant h_2\leqslant h_2{}^*+2$。

显然,顶点 x_1 和 x_2 在 G 中不相邻。根据定理条件,

$$\max\{d_G(x_1),d_G(x_2)\}\geqslant\frac{(b-1)n}{a+b-2}=\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2}。\tag{7}$$

断言 4　$|S|+h_2\geqslant\dfrac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2}$。

如果$|S|+h_2<\dfrac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2}$,则有$|S|+h_1\leqslant|S|+h_2<\dfrac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2}$,这表示

$$d_G(x_1)<\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2},\ d_G(x_2)<\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2},$$

与(7)矛盾。由断言 4,有

$$|S| \geqslant \frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - h_2。\tag{8}$$

情况 2.1　$h_2 = 0$。

显然有 $h_1 = 0$。由(1),(8)及 $|S| + |T| \leqslant n$,

$$-1 \geqslant \delta_{G^*}(S,T) = f^*(S) + d_{G^*-S}(T) - g^*(T) \geqslant$$
$$(a^*+1)|S| + \sum_{x\in T}(d_{G-S}(x)-2) - (b^*-1)|T| \geqslant (a^*+1)|S| - (b^*+1)(n-|S|) =$$
$$(a^*+b^*+2)\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - (b^*+1)n \geqslant 0。$$

矛盾。

情况 2.2　$1 \leqslant h_2 \leqslant b^*$。

由(1),(8),$|S| + |T| \leqslant n$,以及 $|N_T[x_1]| \leqslant h_1 + 1$,

$$-1 \geqslant \delta_{G^*}(S,T) = f^*(S) + d_{G^*-S}(T) - g^*(T) \geqslant (a^*+1)|S| + \sum_{x\in T}(d_{G-S}(x)-2) - (b^*-1)|T| \geqslant$$
$$(a^*+1)|S| + h_1|N_T[x_1]| + h_2(|T| - |N_T[x_1]|) - (b^*+1)|T| \geqslant$$
$$(a^*+1)|S| + (h_1-h_2)|N_T[x_1]| - (b^*-h_2+1)(n-|S|) \geqslant$$
$$(a^*+b^*-h_2+2)\left(\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - h_2\right) + (h_1-h_2)(h_1+1) - (b^*-h_2+1)n。$$

令 $F(h_1,h_2) = (a^*+b^*-h_2+2)\left(\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - h_2\right) + (h_1-h_2)(h_1+1) - (b^*-h_2+1)n$,则

$$-1 \geqslant F(h_1,h_2)。\tag{9}$$

由于 $2 \leqslant h_2 \leqslant b^*$,对 h_2 求导数,

$$F'_{h_2}(h_1,h_2) = 2h_2 - \frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - (a^*+b^*+2) - (h_1+1) + n \geqslant 2h_2 - h_1 - 2 \geqslant h_2 - h_1 \geqslant 0。$$

如果 $h_1 \leqslant h_2$,

$$F(h_1,h_2) \geqslant F(h_1,h_1)。\tag{10}$$

由(9),(10),

$$-1 \geqslant F(h_1,h_2) \geqslant F(h_1,h_1) = (a^*+b^*-h_1+2)\left(\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - h_1\right) - (b^*-h_1+1)n > h_1^2 - h_1 \geqslant 0。$$

矛盾。

如果 $h_1 = h_2 = 1$,

$$-1 \geqslant F(h_1,h_2) = (a^*+b^*+1)\left(\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - 1\right) - b^*n =$$
$$\frac{(a^*+1)n}{a^*+b^*+2} - (a^*+b^*+2) + 1 > 0。\left(n > \frac{(a^*+b^*+1)(a^*+b^*+2)}{a^*+1}\right)$$

矛盾。

如果 $h_1 = 0, h_2 = 1$,则

$$-1 \geqslant F(h_1,h_2) = (a^*+b^*+1)\left(\frac{(b^*+1)n}{a^*+b^*+2} - 1\right) - 1 - b^*n =$$
$$\frac{(a^*+1)n}{a^*+b^*+2} - (a^*+b^*+2) > -1。\left(n > \frac{(a^*+b^*+1)(a^*+b^*+2)}{a^*+1}\right),$$

矛盾。

综上所述,G^* 有一个(g^*,f^*)-因子,那么 $G = G^* \cup E(C)$就有一个哈密顿(g,f)-因子,定理得证。

显然一个哈密顿(g,f)-因子是一个 2-连通的(g,f)-因子。那么有下面的推论成立。

推论　设 G 是一个 n 阶 2-连通图,整数 a,b 满足 $2 \leqslant a < b$,令 $g(x)$和 $f(x)$是定义在 $V(G)$上的两个非负整数值函数,使得 $\forall x \in V(G)$,满足 $a \leqslant g(x) < f(x) \leqslant b$,如果 G 满足:

$$\delta(G) \geqslant \frac{(b-1)^2 - (a-1)(b-a)}{a-1}, \quad n > \frac{(a+b-3)(a+b-2)}{a-1},$$

且 G 中任意两个不相邻的顶点 x,y,有 $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\frac{(b-1)n}{a+b-2}$,则 G 有一个 2-连通的(g,f)-因子。

2 结果的讨论

我们不能确定定理 2 中给出的关于 G 的任意两个不相邻的顶点 x 和 y 满足的条件 $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\frac{(b-1)n}{a+b-2}$是否是最优的,但是可以证明这个条件不能加强为 $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\frac{(b-2)n}{a+b-2}$。

令 $G_1=K_{(b-3)t}$是一个完全图,$G_2=((a-1)t+1)K_1$ 由$(a-1)t+1$ 个孤立顶点组成。记 $G=G_1+G_2$ 为 G_1 和 G_2 的联结图,即 $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$,$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv:u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$,因此有$|V(G_1)|=(b-3)t$,$|V(G_2)|=(a-1)t+1$,$n=|V(G_1)|+|V(G_2)|=(a+b-4)t+1$。其中 t 为一个充分大的正整数。(对于给定的 a 和 b,选择 $t>\frac{(a+b-3)(a+b-2)}{a-1}-\frac{1}{a+b-4}$,就能满足条件 $\delta(G)\geqslant\frac{(b-1)^2-(a-1)(b-a)}{a-1}$,$n>\frac{(a+b-3)(a+b-2)}{a-1}$。)则有

$$\frac{(b-1)n}{a+b-2}>\max\{d_G(x),d_G(y)\}=(b-3)t>\frac{(b-2)n}{a+b-2}$$

对 $V(G_2)$中任意不相邻的两个顶点 x 和 y 成立。显然根据 G 的构造方式,G 有一个哈密顿圈 C。令 $G^*=G-E(C)$,下面证明 G^* 中不存在(g^*,f^*)-因子,其中 $f^*(x)=f(x)-2$,$g^*(x)=g(x)-2$。取 $S=V(G_1)$,$\forall x\in V(G_1)$,令 $g(x)=a$,$f(x)=a+1$;取 $T=V(G_2)$,$\forall x\in V(G_2)$,令 $g(x)=b-1$,$f(x)=b$。则

$$\begin{aligned}\delta_{G^*}(S,T)=f^*(S)-g^*(T)&=(a-1)|V(G_1)|-(b-3)|V(G_2)|=\\&(a-1)(b-3)t-(b-3)((a-1)t+1)=-(b-3)<0。\end{aligned}$$

由引理 2,易知 G^* 中不存在(g^*,f^*)-因子。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan, Press ltd, 1976.
[2] LIU Guizhen. $(g<f)$-Factors of graphs[J]. Acta Math Sci, 1994, 14:285-290.
[3] 刘桂真, 张兰菊.图的因子和因子分解的若干进展[J]. 数学进展,2002, 29(4):289-295.
[4] LIU Guizhen, ZANG Wenan. f-Factors in bipartite (mf)-graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 136:45-54.
[5] CAI Jiansheng, LIU Guizhen. Degree and stability number condition for the existence[J]. J Appl Math Comput, 2009, 29: 349-356.
[6] CAI Jiansheng, LIU Guizhen. Stability number and fractional f-factors in graphs[J]. ArsComb, 2006, 80: 141-146.
[7] LIU Guizhen, ZHANG Lanju. Fractional (g, f)-factors of graphs[J]. Acta Math Scientia: Ser B, 2001, 21(4):541-545.
[8] LIU Hongxia, LIU Guizhen. Neighborhood union and Hamiltonian (g,f)-factors ingraphs[J]. J Appl Math Comput, 2009, 29:207-216.
[9] FAN Genghua. New sufficient conditions for cycles in graphs[J]. J Comb Theory: Ser B, 1984, 37: 221-227.
[10] L Lov'asz. Subgraphs with prescribed valencies[J]. J Combin Theory, 1970, 8:391-416.

(编辑:李晓红)