第43卷 第5期 山东大学学报(理学版) 2008年5月
Vol.43 No.5 Journal of Shandong University(Natural Science) May 2008

文章编号:1671-9352(2008)05-0045-05

一类 Wick 型随机 KdV-MKdV 方程的白噪声泛函解

朱宏[1],刘雄[2]

(1. 广东食品药品职业学院, 广东 广州 510520;
2. 湛江师范学院数学与计算科学学院, 广东 湛江 524048)

摘要:利用埃尔米特变换求出了 Wick 类型的随机广义 KdV-MKdV 方程的精确解,这种方法的基本思想是通过埃尔米特变换把 Wick 类型的随机广义 KdV-MKdV 方程变成广义系数 KdV,利用一种变换方法求出方程的精确解,然后通过埃尔米特的逆变换求出方程的精确解。

关键词:Wick 类型的随机广义 KdV-MKdV 方程;随机精确解;白色噪音;埃尔米特变换

中图分类号:O175 **文献标志码**:A

White noise functional solutions of a Wick-type stochastic KdV-MKdV equation

ZHU Hong [1], LIU Xiong[2]

(1. Guangdong Food and Drug Vocational College, Guangzhou 510520, Guangdong, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong, China)

Abstract: The basic theory of utilizing Almeter transformation to get the exact solution to Wick-typed stochastic general KdV-MKdV equations set is as follows: first, the Wick-typed stochastic general KdV-MKdV equations set was changed into general coefficient KdV equations set by Almeter transformation; then, the exact solution to the KdV equations set was obtained by the methods of a special transformation; finally, the exact solution to the original equations set was obtained by the Almeter inverse transformation.

Key words: Wick-typed elliptical stochastic general KdV-MKdV equations; stochastic exact solution, white noise; Almeter transformation

0 引言

近年来,变系数 KdV-MKdV 方程的研究引起了数学家和物理学家的高度关注,已有许多文献报道了相关研究成果[1-9]。由于波也像分子运动一样受到周围各方面的影响,因此,随机环境下研究非线性发展方程解更具有实际物理意义,从而随机波是随机非线性发展方程的一重要课题,当前有许多人从事随机 KdV-MKdV 方程的研究[2-9]。在文献[7]中 Holden 等给出了用白色噪音泛函来研究 Wick 形式的随机偏微分方程的方法。本文不同于文献[8,9]的方法,将用白色噪音分析法和齐次平衡法来给出 Wick 类型的随机广义 KdV-MKdV 方程的随机精确解,这种方程的形式如下:

$$U_t + H_1(t)\Diamond[U_{xxx} - a_1 U^{\Diamond 2}\Diamond U_x + 2a_2(U_x^{\Diamond 2} + U\Diamond U_{xx})] + a_3 H_1(t)\Diamond H_2(t)\Diamond U\Diamond U_x + [H_3(t) + H_4(t)x]\Diamond U_x + H_4(t)\Diamond U = 0 \tag{1}$$

收稿日期:2008-01-24
基金项目:广东省自然科学基金资助项目(06301315)
作者简介:朱宏(1969-),男,讲师,本科,研究方向为偏微分方程. Email:gzwxhuang@21cn.com

其中，$a_i(i=1,2,3)$为任意常数，$H_i(i=1,2,3,4)$是白色噪音泛函，$H_2(t)=\exp\left[-\int_0^t H_4(s)\mathrm{d}s\right]$，将在第三部分给出其具体表达式，◇是Hida分布空间$(S(\mathbf{R}^d))^*$上的Wick乘(下节给出定义)。

1 理论与方法

在这一节里，将简要的介绍用白色噪音来分析偏微分方程的方法，更详细的内容可以参看文献[7]。

设$h_n(x)$是Hermite多项式，对$n\geqslant 1$，记$\xi_n(x)=\frac{h_n(\sqrt{2}x)}{(\pi(n-1)!)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ 则$\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$是$L^2(\mathbf{R})$的正交基，对于d-维指标$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$，$\alpha_i\in\mathbf{N}$，$(i=1,2,\cdots,d)$，张量积$\{\boldsymbol{\xi}_\alpha=\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}_{\alpha_d},\alpha\in\mathbf{N}^d\}$形成$L^2(\mathbf{R})$的正交基。记$\boldsymbol{\alpha}^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_d^{(i)})$是某固定阶数的$d$-维指标的第$i$个$d$-维指标，假设这指标有如下性质：若$i<j$，则$\alpha_1^{(i)}+\cdots+\alpha_d^{(i)}\leqslant\alpha_1^{(j)}+\cdots+\alpha_d^{(j)}$，定义$\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\xi}_{\alpha^{(i)}}=\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1^{(i)}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}_{\alpha_d^{(i)}}$，$(i\geqslant 1)$，记$(\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})_c=\{\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$，其中只有有限个$\alpha_i\neq 0\}$，对$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in(\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})_c$定义$H_\alpha(\omega)=\prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(\langle\omega,\eta\rangle)$，$\omega\in(S(\mathbf{R}^d))^*$，其中$(S(\mathbf{R}^d))$和$(S(\mathbf{R}^d))^*$分别是$\mathbf{R}^d$上的Hida实验空间和Hida分布空间。对于固定的$n\geqslant 1$，记$(S)_1^n$是$x=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{c}_\alpha H_\alpha\in\bigoplus_{k=1}^n L^2(\mu)$组成的空间，其中是$\boldsymbol{c}_\alpha=(c_{\alpha^{(1)}},c_{\alpha^{(2)}},\cdots,c_{\alpha^{(n)}})\in\mathbf{R}^n$，对$\boldsymbol{c}_\alpha^2=|\boldsymbol{c}_\alpha|^2=\sum_{k=1}^n(\boldsymbol{c}_\alpha^{(k)})^2$，使得$\|x\|_{1,k}^2=\sum_\alpha^2((\boldsymbol{\alpha}!)^2(2\mathbf{N})^{k\boldsymbol{\alpha}}<\infty$，$\forall k\geqslant 1$，$\mu$是$(S^*(\mathbf{R}),B(S^*(\mathbf{R}))$上的白色噪音测度。对于$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in(\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})_c$，记$\boldsymbol{\alpha}!=\prod_{k=1}^n\boldsymbol{c}_k!$和$(2\mathbf{N})^\alpha=\prod_j(2j)^{\alpha_j}$，$(S)_{-1}^n$由是$X=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}b_{\boldsymbol{\alpha}}H_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathbf{R}^n)$组成的空间，其中$X$使得对某个$q\in\mathbf{N}$，$\|X\|_{-1,-q}=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}b_\alpha^2(2\mathbf{N})^{-q\boldsymbol{\alpha}}<\infty$，而半泛数$\|\boldsymbol{x}\|_{1,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}\in\mathbf{N})$是在$(S)_1^n$产生的一个拓扑，并且由$\langle X,x\rangle=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{\boldsymbol{\alpha}},c_{\boldsymbol{\alpha}})\boldsymbol{\alpha}!$，可以把$(S)_{-1}^n$看作是$(S)_1^n$的对偶，这里$(b_\alpha,c_\alpha)$是$\mathbf{R}^n$上的内积。假定$X=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}a_{\boldsymbol{\alpha}}H_{\boldsymbol{\alpha}}$，$\boldsymbol{Y}=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}b_{\boldsymbol{\alpha}}H_{\boldsymbol{\alpha}}\in(S)_{-1}^n$，$a_\alpha,b_\alpha\in\mathbf{R}^n$，则可以用$X\Diamond Y=\sum_{\alpha,\beta}(a_\alpha,b_\alpha)H_{\alpha+\beta}$来定义$X$和$Y$的Wick乘积，此外，还可以证明空间$(S^*(\mathbf{R}),B(S^*(\mathbf{R}))$，$(S)_1^n$和$(S)_{-1}^n$在Wick乘积下是封闭的，用$\mathfrak{R}(X)=\widetilde{X}=\sum_\alpha a_\alpha\boldsymbol{z}^\alpha\in\mathbf{C}^n$(收敛时)来定义$X$的埃尔米特变换，其中$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$，对于$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in(\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})_c$，$\boldsymbol{z}^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}\cdots$，对于$X,Y\in(S)_{-1}^{\mathbf{N}}$及所有的$\boldsymbol{z}$使得$\widetilde{H}(\boldsymbol{z})$，$\widetilde{Y}(\boldsymbol{z})$存在，由埃尔米特变换定义$X\widetilde{\Diamond}Y(\boldsymbol{z})=\widetilde{X}(\boldsymbol{z})\widetilde{Y}(\boldsymbol{z})$，等式右边是由定义在$\mathbf{C}^n$两元素之间复双线性乘积$(z_1^1,\cdots,z_n^1)\cdot(z_1^2,\cdots,z_n^2)=\sum_{k=1}^n z_k^1z_k^2(\boldsymbol{z}\in\mathbf{C})$构成。向量$\boldsymbol{c}_0=\widetilde{X}(0)\in\mathbf{R}^n$叫做$X$的广义期望值，用$E(X)$来表示。假如$f:V\longrightarrow\mathbf{C}^m$是一个解析函数，其中$V$是$E(X)$的一个邻域，并假定$f$在$\mathbf{R}^n$中沿着$E(X)$的泰勒展开有系数，那么其Wick形式为$f^{\Diamond}(X)=\mathfrak{R}^{-1}(fo\widetilde{X})\in(S)_{-1}^m$。考虑表达式为：

$$A(t,\boldsymbol{x},\partial t,\nabla\boldsymbol{x},U,\omega)=0 \tag{2}$$

的随机偏微分方程，其中A为某个给定的函数，而$U=U(t,\boldsymbol{x},\omega)$则是一个未知(或广义)的随机过程，算子$\partial t=\partial/\partial\boldsymbol{x}\,\nabla\boldsymbol{x}=(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_d)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbf{R}^d$。首先给出上面随机偏微分方程的Wick形式为：

$$A^{\Diamond}(t,\boldsymbol{x},\partial t,\nabla\boldsymbol{x},U,\omega)=0, \tag{3}$$

其次，埃尔米特变换把公式(2)的Wick乘积变成普通的乘积，也就是

$$\widetilde{A}(t,\boldsymbol{x},\partial t,\nabla\boldsymbol{x},\widetilde{U},z_1,z_2,\cdots)=0, \tag{4}$$

其中$\widetilde{U}=\mathfrak{R}(u)$是$U$的埃尔米特变换，而$z_1,z_2,\cdots$是复数。假定能找到方程$\widetilde{A}(t,\boldsymbol{x},\partial t,\nabla\boldsymbol{x},\widetilde{U},z_1,z_2,\cdots)=0$的一个解$u=u(t,x,z)$，其中对某些$q,r$，使得$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots)\in K_q(r)$，而$K_q(r)=\left\{\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}\text{且}\sum_{\alpha\neq 0}|\boldsymbol{z}^\alpha|^2(2\mathbf{N})^{q\alpha}<r^2\right\}$，那么在一定的条件下，取其埃尔米特变换的逆变换$U=\mathfrak{R}^{-1}u\in(S)_{-1}^n$，从而得到原Wick方程(3)的一个解$U$。因而得到下面的定理，其详细证明，见文献[7]。

定理 1　假定 $u(t,x,z)$ 是方程(4)的一个解(普通强的,逐点指向的),其中(t,x)是在某一个 $G\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ 的有界开集的元素和对某些 q,r,便得 $z\in K_q(r)$。此外,假设 $u(t,x,z)$ 及方程(4)中所有它的偏导对于$(t,x,z)\in G\times K_q(r)$是有界的,而对所有 $z\in K_q(r)$ 关于$(t,x)\in G$ 是连续的和对所有$(t,x)\in G$ 关于 $z\in K_q(r)$ 连续。所以存在 $U(t,x)\in(S)_{-1}$ 对所有$(t,x,z)\in G\times K_q(r)$使得 $u(t,x,z)=(\widetilde{U}(t,x))(z)$,从而在$(S)_{-1}$ 中用 $U(t,x)$ 来解方程(3)(在$(S)_{-1}$ 中是强指向的)。

2　方程的随机精确解

下面利用第二节给出的理论和方法求解方程(1)的精确解。

首先对方程(1)取埃尔米特变换得

$$\widetilde{U}_t+\widetilde{H}_1(t,z)[\widetilde{U}_{xxx}-a_1\widetilde{U}^2\widetilde{U}_x+2a_2(\widetilde{U}_x^2+\widetilde{U}\widetilde{U}_{xx})]+a_3\widetilde{H}_1(t,z)\widetilde{H}_2(t,z)\widetilde{U}\widetilde{U}_x+[\widetilde{H}_3(t,z)+\widetilde{H}_4(t,z)x]\widetilde{U}_x+\widetilde{H}_4(t,z)\widetilde{U}=0,\tag{5}$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots)\in(\mathbf{C}^{\mathbf{N}})_c$ 是向量参数。为了简洁起见:令 $\widetilde{H}_i(t,z)=H_i(t,z),(i=1,2,3,4),\widetilde{U}=u$,方程可写为:

$$u_t+H_1(t,z)[u_{xxx}-a_1u^2u_x+2a_2(u_x^2+uu_{xx})]+a_3H_1(t,z)H_2(t,z)uu_x+[H_3(t,z)+H_4(t,z)x]u_x+H_4(t,z)u=0。\tag{6}$$

设给定方程(6)有如下形式的解:

$$u(t,x,z)=f(t,z)H(\xi),\xi=f(t,z)x+g(t,z)+c,\tag{7}$$

其中 $H(\xi),F(t,z),g(t,z)$ 为待定函数,c 为任意常数,由(7)式易知

$$u_{xxx}=f^4(t,z)H'''(\xi),\ u^2u_x=f^4(t,z)H^2(\xi)H'(\xi),\ u_x^2=f^4(t,z)H'^2(\xi),$$
$$uu_{xx}=f^4(t,z)H(\xi)H''(\xi),\ u_x=f^4(t,z)H'(\xi),\ uu_x=f^3(t,z)H(\xi)H'(\xi),$$
$$u_t=f_t(t,z)H(\xi)+f(t,z)g_tH'(\xi)+f(t,z)f_txH'(\xi),$$

将上式代入(6),得

$$\begin{aligned}&H_1(t,z)[u_{xxx}-a_1u^2u_x+2a_2(u_x^2+uu_{xx})]+a_3H_1(t,z)H_2(t,z)uu_x+\\&[H_3(t,z)+H_4(t,z)x]u_x+H_4(t,z)u=H_1(t,z)[f^4(t,z)H'''(\xi)-\\&a_1f^4(t,z)H^2(\xi)H'(\xi)+2a_2(f^4(t,z)H'^2(\xi)+f^4(t,z)H(\xi)H''(\xi))]+\\&a_3H_1(t,z)H_2(t,z)f^3(t,z)H(\xi)H'(\xi)+[H_3(t,z)f^2(t,z)+f(t,z)g_t+\\&(H_4(t,z)f^2(t,z)+f(t,z)f_t)x]H'(\xi)+[H_4(t,z)f^2(t,z)+f_t]H(\xi)=0。\end{aligned}\tag{8}$$

为了求解方程(8),设

$$[H_4(t,z)f^2(t,z)+f_t=0,\tag{9}$$

$$H_3(t,z)f^2(t,z)+f(t,z)g_t=D_0H_1(t,z)f^4(t,z),\tag{10}$$

其中 D_0 为任意常数,对方程(9)通过分离变量并且积分可得

$$f(t,z)=A\exp\Big[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s\Big],\tag{11}$$

其中 $A\neq0$ 为积分常数,将式(11)代入式(10)整理积分可得

$$g(t,z)=\int_0^tD_0A^4H_1(t,z)\exp[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s]]-AH_3(t,z)\exp[-3\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s]]\mathrm{d}t,\tag{12}$$

又因为 $H_2(t,z)=\exp\Big[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s\Big]=\dfrac{f(t,z)}{A}$,将此式及式(10),式(11)代入式(9),并结合 $f(t,z)\neq0$ 得

$$H'''(\xi)-a_1H^2(\xi)H'(\xi)+2a_2(H'^2(\xi)+H(\xi)H''(\xi))+\frac{a_3}{A}H(\xi)H'(\xi)+D_0H'(\xi)=0,\tag{13}$$

对方程(13)两边积分,并令积分常数为零,得

$$H''(\xi)-\frac{a_3}{A}H^3(\xi)+2a_2H(\xi)H'(\xi)+\frac{a_3}{2A}H(\xi)H'(\xi)+D_0H(\xi)=0。\tag{14}$$

设式(14)有如下形式的解

$$H(\xi)=\frac{Me^{\lambda\xi}}{1+e^{\lambda\xi}}=\frac{M}{2}\left[1+\tanh\frac{\lambda}{2}\xi\right],\tag{15}$$

其中 M,λ 为待定常数,则

$$H'(\xi)=\frac{\lambda Me^{\lambda\xi}}{(1+e^{\lambda\xi})^2},\tag{16}$$

$$H''(\xi)=\frac{\lambda^2Me^{\lambda\xi}-\lambda^2Me^{2\lambda\xi}}{(1+e^{\lambda\xi})^3},\tag{17}$$

将式(15)~式(17)代入式(12)式并令 $e^{\lambda\xi},e^{2\lambda\xi},e^{3\lambda\xi}$ 的系数为零,

$$\begin{gathered}\lambda^2M+D_0M=0,\\ -\frac{a_1}{3}M^3+\frac{a_3}{2A}M^2+D_0M=0,\\ -\lambda^2M+2a_2\lambda M^2+\frac{a_3}{2A}M^2+2D_0M=0,\end{gathered}\tag{18}$$

从方程(18)得

(a) $D_0=-\lambda^2,\lambda=\dfrac{a_2a_3\pm a_3\sqrt{9a_2^2+6a_1}}{6a_1A+8a_2^2}$,

$$M=\frac{a_3(a_2\pm\sqrt{9a_2^2+6a_1})^2}{(6a_1A+8a_2^2)(3a_1+6a_2^2\pm2a_2\sqrt{9a_2^2+6a_1})},$$

(b) $a_1=-\dfrac{4a_2^2}{3}$ 时,$D_0=-\lambda^2,\lambda=-\dfrac{a_3}{2Aa_2},M=-\dfrac{3a_3}{2Aa_2^2}$,

由式(7)~式(18),得如下结果

(c) 当 $3a_1+4a_2^2\neq0,D_0=\dfrac{(a_2a_3\pm\sqrt{9a_2^2+6a_1})^2}{6a_1A+8a_2^2}$ 时,方程(6)有类扭状孤子解:

$$u_1\pm(t,x,z)=\frac{3a_3(a_3\pm\sqrt{9a_2^2+6a_1})^2A\exp\left[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s\right]}{(12a_1A+16Aa_2^2)(3a_1+6a_2^2\pm2a_2\sqrt{9a_2^2+6a_1})},$$

$$\left\{1+\tanh\left[\frac{a_2a_3\pm a_3\sqrt{9a_2^2+6a_1}}{4A(3a_1A+4a_2^2)}\left[A\exp\left[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s\right]x+g(t,z)+a_0\right]\right]\right\},\tag{19}$$

(d) 当 $3a_1+4a_2^2=0,D_0=-\dfrac{a_3^2}{4Aa_2^2}$ 时,方程(6)有另一组类扭状孤子解:

$$u_2\pm(t,x,z)=-\frac{a_3^2}{4a_2^2}\exp\left[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s\right],$$

$$\{1+\tanh[-\frac{a_3}{4Aa_2}[A\exp[-\int_0^tH_4(s,z)\mathrm{d}s]x+g(t,z)+a_0]]\},\tag{20}$$

其中 $g(t,z)$ 满足式(12)。当 a_1,a_2a_3 都不为零时,方程(6)不存在类钟状孤波解。接下来对方程(1)的系数作如下约定:假设 $H_4=h(t)+b_4W(t),H_1=b_1W(t),H_3=b_3W(t)$,其中 $W(t)$ 是高斯白噪音,它们的埃尔米特变换为 $\widetilde{H}_1=b_1\widetilde{W}(t,z),\widetilde{H}_3=b_3\widetilde{W}(t,z),\widetilde{H}_4=h(t)+b_4\widetilde{W}(t,z)$,这里 b_1,b_2,b_3 为任意常数,而 $\widetilde{W}(t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\eta_k(s)\mathrm{d}sz_k$。为了得到方程(1)的随机精确解,给出条件(a):假设(t,x)是属于一个有界开集 $G\subset\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^2$ 的元素,对某些 $q>0,r>0$ 的所有 $z\in K_q(r)$ 使得 $H_i(t,z)(i=1,2,3,4)$ 满足 $u(t,x)$ 和在方程(2)中所有偏导对$(t,x)\in G\times K_q(r)$是一致有界,对所有 $z\in K_q(r)$ 关于$(t,x)\in G$是连续的,对所有$(t,x)\in G$ 关于 $z\in K_q(r)$ 是分析的,由条件(a)和定理1得:隐含存在 $u(t,x)\in(S)_{-1}^n$ 对于所有$(t,x,z)\in G\times K_q(r)$ 使得 $u(t,x,z)=(\Re U(t,x))(z)$,由上面知道 $u(t,x)$ 是 $u(t,x,z)$ 的埃尔米特逆变换,因此,由 $u(t,x)$ 解方程(1),得到方程(1)的随机精确解如下:如果取 $H_4=h(t)+a\dot{B}(t)$,而 $B(t)$ 是布朗运动,它们

有 $W(t) = \dot{B}(t)$ 的关系,$h(t)$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的可积函数或有界函数, 又因为 $\exp^{\diamondsuit}\{B(t)\} = \exp\left\{B(t) - \frac{1}{2}t^2\right\}\exp\left\{B(t) - \frac{1}{2}t^2\right\}$(见文献[7] 的引理 2.6.16),从而得到方程(1) 相对应的随机精确解如下:

$$U_1 \pm (t,x) = \frac{3a_3(a_3 \pm \sqrt{9a_2^2 + 6a_1})^2 A\exp\left[-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - b_4 B(t) + \frac{b_4 t^2}{2}\right]}{(12a_1 A + 16Aa_2^2)(3a_1 + 6a_2^2 \pm 2a_2\sqrt{9a_2^2 + 6a_1})},$$

$$\{1 + \tanh[\frac{a_2 a_3 \pm a_3\sqrt{9a_2^2 + 6a_1}}{4A(3a_1 A + 4a_2^2)}[A\exp[-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - b_4 B(t) + \frac{b_4 t^2}{2}]x + g(t,z) + a_0]]\}, \tag{21}$$

$$g(t) = \int^t [D_0 A^4 b_1 \exp[-3\int_0^\tau h(s)\mathrm{d}s - 3b_4 B(\tau) + \frac{3b_4\tau^2}{2}] -$$

$$Ab_3\exp[-3\int_0^\tau h(s)\mathrm{d}s - 3b_4 B(\tau) + \frac{3b_4\tau^2}{2}]\delta B(t), \tag{22}$$

$$U_2 \pm (t,x,z) = -\frac{3a_3 A}{4Aa_2^2}\exp[-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - b_4 B(t) + \frac{b_4 t^2}{2}],$$

$$\{1 + \tanh[-\frac{a_3}{4Aa_2}[A\exp[-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - aB(t) + \frac{b_4 t^2}{2}]x + g(t,z) + a_0]]\}, \tag{23}$$

其中

$$g(t) = \int^t [D_0 A^4 b_1 \exp[-3\int_0^\tau h(s)\mathrm{d}s - 3b_4 B(\tau) + \frac{3b_4\tau^2}{2}] -$$

$$Ab_3\exp(-3\int_0^\tau h(s)\mathrm{d}s - 3Bb_4(\tau) + \frac{3b_4\tau^2}{2})]\delta B(t) \tag{24}$$

当 $a_1, a_2 a_3$ 都不为零时,方程(6) 不存在类钟状孤波解。在式(22),式(24) 中用下面的关系

$$\int_{\mathbf{R}} \Psi(t)\delta B(t) = \int_{\mathbf{R}} \Psi(t)\diamondsuit\omega(t)\mathrm{d}t, \Psi(t) \in L^2(\mathbf{R}),$$

这里$\int(\cdot)\delta B(t)$ 是 Skorohod 积分。

3　结束语

(1) 本文用埃尔米特变换来研究 Wick 类型随机广义 KdV-MKdV 方程,得到一些随机精确解。这些方法可以求出一大类随机非线性演化方程的随机精确解,也可以推广到更复杂的有物理背景的随机非性线演化方程。另外,这些方程也可以用别的方法进行研究而得到别的随机解。

(2) 在方程(1) 中若 Wick 乘 ◇ 变成普通乘积,那么方程(1) 则变成我们所熟悉的变系数广义 KdV-MKdV 方程,即

$$u_t + H_1(t)[u_{xxx} - a_1 u^2 u_x + 2a_2(u_x^2 + uu_{xx})] + a_3 H_1(t)H_2(t)uu_x + [H_3(t) + H_4(t)x]u_x + H_4(t)u = 0,$$

其中 $H_i(t)(i = 1, 2, 3, 4)$ 是关于 t 的函数[4]。

(3) 此外在求解过程中发现 Poisson 白色噪音空间与 Wiener 白色噪音空间之间存在单一映射关系,Poisson 随机偏方程的解可以把这一映射映射到高斯随机偏方程的解而求出。这简便精确的连续是由 Benth 等给出的,也可见文献[7] 的 4.9 节的论述。

参考文献:

[1] ABLOWITZ M J, Clarkson P A, SOLITONS. Nonlinear evolution equation and inverse scattering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
[2] 楼森岳,阮航宇.变系数 KdV 变系数 MKdV 方程的无穷多守衡律[J].物理学报,1992,41(2):182-187.
[3] LIU X Q. Exact solutions of the variable coefficient KdV and SG type equations[J]. Appl Math JCU, 1998, 13(B):25-30.

(下转第 53 页)

(上接第49页)

[4] 闫振亚,张鸿庆.具有3个任意函数的变系数KdV-MKdV方程的精确类孤子解[J]. 物理学报, 1999, 48(11):1957-1961.

[5] 张解放,陈芳跃.截断展开方法和广义变系数KdV方程的精确类孤子解[J].物理学报, 2001, 50(9):1648-1650.

[6] 李德生,张鸿庆.改进的tanh函数与广义变系数KdV和MKdV方程的新的精确解[J].物理学报,2003,52(7):1569-1573.

[7] HOLDEN H, ØKSENDAL B, UBØE J, et al. Stochastic partial differential equations[M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

[8] WEI Caimin, XIA Zunquan. Exact soliton-like solutions for stochastic combined Burgers-KdV equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005(26):329-336.

[9] WEI Caimin, XIA Zunquan, TIAN Naishuo. Jacobian elliptic function expansion solutions of nonlinear stochastic equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005(26):551-558.

(编辑:陈丽萍)