第 43 卷 第 10 期 Vol. 43 No. 10
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) Journal of Shandong University (Natural Science)
2008 年 10 月 Oct. 2008

文章编号:1671-9352(2008)10-0041-05

一类迭代泛函微分方程的解析解

刘凌霞
(潍坊学院数学系, 山东 潍坊 261061)

摘要:在复数域中讨论一阶迭代泛函微分方程的解析解。对 Schröder 变换中的常数 α,除讨论 $0<|\alpha|<1$ 的情形,还讨论 α 是共振点即 α 是单位根的情形以及 α 在共振点附近且满足 Brjuno 条件的情形。

关键词:迭代;泛函微分方程;解析解;优级数;Brjuno 条件
中图分类号:O175 **文献标志码**:A

Analytic solutions of an iterative functional differential equation

LIU Ling-xia
(Weifang University, Weifang 261061, Shandong, China)

Abstract: Analytic solutions of an iterative functional differential equation were discussed in a complex field. For constant α given in the Schröder transformation, besides the case of $0<|\alpha|<1$, α is the resonance point, i.e. a root of the unity and those α near resonance point under the Brjuno condition.

Key words: iterative; functional differential equation; analytic solution; majorant series; Brjuno condition

0 引言

迭代泛函微分方程是传统的泛函微分方程以外的一种具有复杂偏差变元的新型方程,这种方程的时滞不仅依赖于时间而且依赖于状态甚至状态的导数。这类带时滞的迭代泛函微分方程被广泛研究[1-6]。在文献[1]中,Eder 研究了方程 $x'(t)=x(x(t))$ 解析解的存在性,在文献[2]中,Stanek 研究了方程 $x'(t)=x(x(t))+x(t)$。文献[3,4]在复数域中讨论了一阶迭代泛函微分方程 $x'(z)=f(\sum_{s=0}^{m}c_s x^s(z))$ 和 $x'(z)=\frac{1}{x(az+bx(z))}$ 解析解的存在性。本文将在复数域中讨论一阶迭代微分方程

$$x'(x^{[r]}(z))=\frac{1}{c_0 z+c_1 x(z)+c_2 x(x(z))+\cdots+c_m x^{[m]}(z)}\quad(\sum_{j=0}^{m}c_j\neq 0,m\geqslant 2)\tag{0.1}$$

解析解的存在性,其中 r,m 是非负整数,$c_0,c_1,\cdots,c_m$ 是复值常数,并且 $x^{[i]}$ 表示 x 的 i 次迭代。通过 Schröder 变换,方程(0.1)转化为不含未知函数迭代的辅助方程

$$y'(\alpha^r z)=\alpha y'(\alpha^{r+1}z)\cdot\sum_{k=0}^{m}c_k y(\alpha^k z),\tag{0.2}$$

其中 $y(0)=\frac{1}{\alpha\zeta}$(为了讨论方便,令 $\zeta=\sum_{k=0}^{m}c_k$)。假设下列条件

(H1) $0<|\alpha|<1$;

收稿日期:2008-05-07
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(2006ZRB01066)
作者简介:刘凌霞 1970-),女,讲师,硕士,研究方向为微分方程与动力系统. Email: llxmath@126.com

（H2）$\alpha = e^{2\pi i\theta}$，其中 $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 是一个 Brjuno 数[7,8]，即 $B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < \infty$，$\{p_k/q_k\}$表示 θ 的连分数展开的部分分数数列，则称 α 满足 Brjuno 条件；

（H3）$\alpha = e^{2\pi i q/p}$，其中常数 $p \in N$ 且 $p \geqslant 2, q \in Z/\{0\}, \alpha \neq e^{2\pi i l/k}$，对 $\forall 1 \leqslant k \leqslant p-1, l \in Z/\{0\}$。

1 辅助方程的解析解

下面寻找辅助方程(0.2)在初值条件 $y(0) = \frac{1}{\alpha\zeta}$下的幂级数解

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_0 = \frac{1}{\alpha\zeta}。 \tag{1.1}$$

把式(1.1)代入式(0.2)并比较系数得

$$(1 - \alpha b_0 \sum_{k=0}^{m} c_k) b_1 = 0, \tag{1.2}$$

$$n+2)\alpha^{r(n+1)}(1-\alpha^{n+1})b_{n+2} = \sum_{i=0}^{n}(\sum_{k=0}^{m} c_k \alpha^{i(r+1)+k(n+1-i)+1})(i+1)b_{i+1}b_{n+1-i}。(n=0,1,2\cdots) \tag{1.3}$$

由于 $b_0 = \frac{1}{\alpha\zeta} = \frac{1}{\alpha\sum_{k=0}^{m} c_k}$，故 $1 - \alpha b_0 \sum_{k=0}^{m} c_k = 0$，所以取 $b_1 = \eta \neq 0 \in C$，因此数列$\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$可由式(1.3)惟一确定。这意味着式(0.2)存在形式幂级数解

$$y(z) = \frac{1}{\alpha\zeta} + \eta z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n。 \tag{1.4}$$

定理 1.1 假定(H1)成立，则当 $r \leqslant m, c_0 = c_1 = \cdots = c_{r-1} = 0$ 且 η 为任意非零复数时，方程(0.2)在原点的邻域内存在形如式(1.4)的解析解。

证明 首先寻找形如式(1.4)的幂级数解。由于 $0 \leqslant i \leqslant n$，$r \leqslant m, 0 < |\alpha| < 1$，且存在某个正数 M 有

$$\left|\frac{\left(\sum_{k=r}^{m} c_k \alpha^{i(r+1)+k(n+1-i)+1}\right)(i+1)}{(n+2)\alpha^{r(n+1)}(1-\alpha^{n+1})}\right| = \left|\frac{\left(\sum_{k=r}^{m} c_k \alpha^{(k-r)(n+1-i)+i+1}\right)(i+1)}{(n+2)(1-\alpha^{n+1})}\right| \leqslant \frac{\sum_{k=r}^{m}|c_k|}{|1-\alpha^{n+1}|} \leqslant M。(n=0,1\cdots)$$

于是

$$|b_{n+2}| \leqslant M \sum_{i=0}^{n} |b_{i+1}| \cdot |b_{n+1-i}|。(n=0,1\cdots) \tag{1.5}$$

令 $a = \frac{1}{|\alpha\zeta|}$，定义数列$\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$：$B_0 = a$，$B_1 = |\eta|$，

$$B_{n+2} = M \sum_{i=0}^{n} B_{i+1} B_{n+1-i}。(n=0,1\cdots) \tag{1.6}$$

下面证明

$$|b_n| \leqslant B_n。(n=0,1\cdots) \tag{1.7}$$

事实上，$|b_0| = \frac{1}{|\alpha\zeta|} = a = B_0$，$|b_1| = |\eta| = B_1$，假设 $n = 0,1,\cdots,k+1$ 时式(1.7)成立，则当 $n = k+2$ 时，有 $|b_{k+2}| \leqslant M\sum_{i=0}^{k}|b_{i+1}||b_{k+1-i}| \leqslant M\sum_{i=0}^{k} B_{i+1}B_{k+1-i} = B_{k+2}$，由数学归纳法知式(1.7)成立。

下面寻找幂级数(1.4)的优级数。令

$$G(z) = a + |\eta| z + \sum_{n=2}^{\infty} B_n z^n, \tag{1.8}$$

则

$$G^2(z) = (a + \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} z^{n+1})(a + \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} z^{n+1}) = a^2 + 2a(G(z) - a) + \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} B_{i+1}B_{n+1-i})z^{n+2} =$$
$$-a^2 + 2aG(z) + \frac{1}{M}(G(z) - |\eta| z - a) = \left(2a + \frac{1}{M}\right)G(z) - \frac{|\eta|}{M}z - a^2 - \frac{a}{M}。$$

在点$(0,a)$的邻域内定义函数

$$R(a,\eta,M,z,\omega)=\omega^2-\left(2a+\frac{1}{M}\right)\omega+\frac{|\eta|}{M}z+a^2+\frac{a}{M}。\tag{1.9}$$

因为 $R(a,\eta,M,0,a)=0,R'_\omega(a,\eta,M,0,a)=-\dfrac{1}{M}\neq 0$,因此在原点的邻域内存在惟一的解析解 $\omega(a,\eta,M,z)$,满足 $\omega(a,\eta,M,0)=a,\omega'(a,\eta,M,0)=|\eta|$且满足 $R(a,\eta,M,z,\omega(a,\eta,M,z))=0$,所以有 $\omega(a,\eta,M,z)=G(z)$,由此可推出幂级数(1.8)在原点的邻域内收敛,于是幂级数(1.4)也在原点的邻域内收敛。

当 $\alpha\in$(H2)时 α 在复数域 C 中的单位圆上,下面讨论 $\alpha\in$(H2)即 α 满足 Brjuno 条件时辅助方程(0.2)的解析解的存在性。

对任意一个有理数 θ,令$[\theta]$表示它的整数部分,$\{\theta\}=\theta-[\theta]$表示它的小数部分,于是对任意一个无理数 θ 有一个惟一的高斯连分数表示:

$$\theta=a_0+\theta_0=a_0+\frac{1}{a_1+\theta_1}=\cdots。$$

本文简记为 $\theta=[a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots]$,其中数列$\{a_j\}$和$\{\theta_j\}$通过以下方法得到:(a) $a_0=[\theta]$, $\theta_0=\{\theta\}$;(b) $a_n=\left[\dfrac{1}{\theta_{n-1}}\right]$, $\theta_n=\left\{\dfrac{1}{\theta_{n-1}}\right\}$, $n=1,2\cdots$。下面定义数列$\{p_n\}_{n\in N}$和$\{q_n\}_{n\in N}$:

$$q_{-2}=1,\ q_{-1}=0,\ q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2};$$
$$p_{-2}=0,\ p_{-1}=1,\ p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}。$$

易证:$p_n/q_n=[a_0,a_1,\cdots,a_n]$。因此,对任意的 $\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$,函数 $B(\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\log q_{n+1}}{q_n}<+\infty$,则 θ 是一个 Brjuno 数,或者说 θ 满足 Brjuno 条件。Brjuno 条件是一个比 Diophantine 条件更弱的条件,因此需要引入 Davie 引理,在引入该引理以前,首先回顾一下相关的知识[8]。

令 $\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $(q_n)_{n\in N}$是 θ 的高斯连分数表示,且令 $A_k=\left\{n\geqslant 0\mid\ \|n\theta\|\leqslant\dfrac{1}{8q_k}\right\}$, $E_k=\max\left\{q_k,\dfrac{q_{k+1}}{4}\right\}$, $\eta_k=\dfrac{q_k}{E_k}$,令 A_k^* 是$j\geqslant 0$ 的集合,j 满足$j\in A_k$ 或对某个j_1, $j_2\in A_k$ 满足$j_2-j_1<E_k$,且当 $j_1<j<j_2$ 时 q_k 整除 $j-j_1$。对任意的整数 $n\geqslant 0$,定义 $l_k(n)=\max\left\{(1+\eta_k)\dfrac{n}{q_k}-2,(m_n\eta_k+n)\dfrac{1}{q_k}-1\right\}$,其中 $m_n=\max\{j\mid 0\leqslant j\leqslant n,j\in A_k^*\}$。下面定义函数 $h_k:\mathbf{N}\to\mathbf{R}^+$,令

$$h_k(n)=\begin{cases}\dfrac{m_n+\eta_k n}{q_k}-1, & (m_n+q_k\in A_k^*)\\ l_k(n), & (m_n+q_k\notin A_k^*)\end{cases}$$

$$g_k(n):=\max\left\{h_k(n),\left[\frac{n}{q_k}\right]\right\}。$$

定义 $k(n)$使得 $q_{k(n)}\leqslant n\leqslant q_{k(n)+1}$,易证 $k(n)$是不减的。下面介绍 Davie 引理。

引理 1.1 (Davie 引理[9]) 令 $K(n)=n\log 2+\sum\limits_{k=0}^{k(n)}g_k(n)\log(2q_{k+1})$,则

(a) 存在一个常数 $\gamma>0$(不依赖于 n 和θ)满足 $K(n)\leqslant n\left(\sum\limits_{k=0}^{k(n)}\dfrac{\log q_{k+1}}{q_k}+\gamma\right)$;

(b) 对任意的 n_1、n_2,$K(n_1)+K(n_2)\leqslant K(n_1+n_2)$;

(c) $-\log|\alpha^n-1|\leqslant K(n)-K(n-1)$。

定理 1.2 假定(H2)成立,则当 $r\leqslant m,c_0=c_1=\cdots=c_{r-1}=0$ 且 $0<|\eta|<1$ 时,方程(0.2)在原点的邻域内存在形如(1.4)的解析解。

证明 如在定理 1.1 中的证明,寻找形如式(1.4)的解析解。定义 $b_0=\dfrac{1}{\alpha\zeta}$, $b_1=\eta\neq 0$,式(1.3)仍然成立。令 $N=\sum\limits_{k=r}^{m}|c_k|$,则有

$$|b_{n+2}|\leqslant\frac{N}{|1-\alpha^{n+1}|}\sum_{i=0}^{n}|b_{i+1}|\cdot|b_{n+1-i}|。(n=0,1\cdots)\tag{1.10}$$

定义数列$\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$：$D_0=a$，$D_1=1$，$D_{n+2}=N\sum_{i=0}^{n}D_{i+1}D_{n+1-i}$，$n=0,1\cdots$。在$(0,a)$的邻域内定义函数

$$R(a,1,N,z,\varphi)=\varphi^2-\left(2a+\frac{1}{N}\right)\varphi+\frac{z+a}{N}+a^2。\tag{1.11}$$

其中 R 在式(1.9)中已定义。类似定理 1.1 的证明，$\varphi(a,1,N,z)$可在原点的邻域内展开为一致收敛的幂级数：

$$\varphi(a,1,N,z)=a+z+\sum_{n=2}^{\infty}D_nz^n。\tag{1.12}$$

由此可推出幂级数(1.12)在原点的邻域内一致收敛。因此存在一个常数 T，满足

$$D_n<T^n。(n=0,1\cdots)\tag{1.13}$$

用归纳法可证明$|b_n|\leqslant D_n e^{K(n-1)}$，$n=1,2\cdots$，其中，$K:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ 在引理 1.1 中已经被定义。事实上$|b_0|=\frac{1}{|\alpha\zeta|}=a=D_0$，$|b_1|=|\eta|\leqslant 1=D_1$，假设$|b_{j+1}|\leqslant D_{j+1}e^{K(j)}$，$j\leqslant n$，则由式(1.10)和引理 1.1 有

$$|b_{n+2}|\leqslant\frac{N}{|1-\alpha^{n+1}|}\sum_{i=0}^{n}D_{i+1}e^{K(i)}\cdot D_{n+1-i}e^{K(n-i)}\leqslant\frac{N}{|1-\alpha^{n+1}|}\sum_{i=0}^{n}D_{i+1}D_{n+1-i}e^{K(n)}=\frac{e^{K(n)}}{|1-\alpha^{n+1}|}D_{n+2}，(n=0,1\cdots)$$

由引理 1.1(c)知 $K(n)-\log|\alpha^{n+1}-1|\leqslant K(n+1)$，故$|b_{n+2}|\leqslant e^{K(n+1)}D_{n+2}$，由引理 1.1(a)知存在一个常数 $\gamma>0$ 使得 $K(n)\leqslant n(B(\theta)+\gamma)$，因此$|b_{n+2}|\leqslant e^{(n+1)(B(\theta)+\gamma)}D_{n+2}$，又由式(1.13)得$|b_{n+2}|\leqslant T^{n+2}e^{(n+1)(B(\theta)+\gamma)}$，则 $\lim_{n\to\infty}\sup(|b_{n+2}|^{\frac{1}{n}})\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup(T^{n+2}e^{(n+1)(B(\theta)+\gamma)})^{\frac{1}{n}}=Te^{B(\theta)+\gamma}$，这表明级数(1.4)的收敛半径不超过$(Te^{B(\theta)+\gamma})^{-1}$。

当 $\alpha\in$(H3)时 α 不仅在复数域 $\mathbf{C}$ 中的单位圆上，而且是一个单位根，因此 α 不满足(H2)中的 Brjuno 条件。下面定义数列$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$：$A_0=a$，$A_1=1$ 和

$$A_{n+2}=\Gamma N\sum_{i=0}^{n}A_{i+1}A_{n+1-i}。(n=0,1\cdots)\tag{1.14}$$

其中 a,N 在定理 1.1 和定理 1.2 中已定义，并且 $\Gamma:=\max\left\{1,\frac{1}{|\alpha-1|},\frac{1}{|\alpha^2-1|},\cdots,\frac{1}{|\alpha^{p-1}-1|}\right\}>0$。

定理 1.3　假定(H3)成立，$r\leqslant m$，$c_0=c_1=\cdots=c_{r-1}=0$ 且 $0<|\eta|<1$，数列$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$满足 $b_0=\frac{1}{\alpha\zeta}$，$b_1=\eta$ 和

$$(n+2)\alpha^{r(n+1)}(1-\alpha^{n+1})b_{n+2}=\Theta(n,\alpha,b_1,b_2,\cdots,b_{n+1})。(n=0,1\cdots)\tag{1.15}$$

其中

$$\Theta(n,\alpha,b_1,b_2,\cdots b_{n+1}):=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m}c_k\alpha^{i(r+1)+k(n+1-i)+1}\right)(i+1)b_{i+1}b_{n+1-i}。$$

则当 $\Theta(lp-1,\alpha,b_1,b_2,\cdots b_{lp})\neq 0$，$l=1,2\cdots$时，方程(0.2)在原点的任何邻域内都不存在解析解。当 $\Theta(lp-1,\alpha,b_1,b_2,\cdots b_{lp})=0$，$l=1,2\cdots$时，方程(0.2)在原点的某邻域内存在解析解 $y(z)$，使得 $y(0)=\frac{1}{\alpha\zeta}$，$y'(0)=\eta$，$y^{(lp+1)}(0)=(lp+1)!\ \tau_{lp+1}$其中 τ_{lp+1}是满足$|\tau_{lp+1}|\leqslant A_{lp+1}$的任一常数，数列$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$由式(1.14)定义。

证明　类似于定理 1.1 中的证明，假设式(0.2)的幂级数解为式(1.4)的形式，把式(1.4)代入式(0.2)并比较系数得式(1.3)(或式(1.15))仍然成立。当 $\Theta(lp-1,\alpha,b_1,b_2,\cdots b_{lp})\neq 0$ 时，因为 $\alpha^{n+1}-1=\alpha^{lp}-1=0$，所以式(1.3)(或式(1.15))两边不相等，从而方程(0.2)没有解析解。

当 $\Theta(lp-1,\alpha,b_1,b_2,\cdots b_{lp})=0$ 时，因为 $\alpha^{n+1}-1=\alpha^{lp}-1=0$，因此，式(1.3)(或式(1.15))中 b_{lp+1}有无穷多种选择，其解析解形成一个具有无穷多个参数的解族。任取 $b_{lp+1}=\tau_{lp+1}$，使得$|\tau_{lp+1}|\leqslant A_{lp+1}$，$l=1,2\cdots$。下面证明级数(1.4)在原点的邻域内收敛。由式(1.10)得出，对任意的 $n\neq lp-1$，$l=1,2\cdots$有

$$|b_{n+2}|\leqslant\Gamma N\sum_{i=0}^{n}|b_{i+1}|\cdot|b_{n+1-i}|。(n=0,1\cdots)\tag{1.16}$$

为了构造优级数，考虑隐函数方程

$$R(a,1,\Gamma N,z,\Psi)=0,\tag{1.17}$$

其中 R 在式(1.9)中已定义,a,N 在定理 1.1、定理 1.2 中已定义。类似定理 1.2 的证明,$\Psi(a,1,\Gamma N,z)$可在原点的邻域内展开成一致收敛的幂级数

$$\Psi(a,1,\Gamma N,z)=a+z+\sum_{n=2}^{\infty}A_n z^n。\tag{1.18}$$

代式(1.18)到式(1.17)中,比较系数可得式(1.14)成立。用数学归纳法易证

$$|b_n|\leqslant A_n,\ n=0,1\cdots。\qquad 1.19)$$

由式(1.18)的收敛性和不等式(1.19)可得出级数(1.4)在原点的邻域内收敛。定理 1.3 得证。

2　方程(0.1)的解析解

下面给出方程(0.1)的可逆解析解的存在定理。

定理 2.1　假设定理 1.1、定理 1.2 或定理 1.3 满足,则方程(0.1)在原点的邻域内有一个形如 $x(z)=y(\alpha y^{-1}(z))$的解析解,且满足 $x\left(\frac{1}{\alpha\zeta}\right)=\frac{1}{\alpha\zeta}$,$x'\left(\frac{1}{\alpha\zeta}\right)=\alpha$,其中 $y(z)$是方程(0.2)的并且由定理 1.1、定理 1.2 或定理 1.3 确定的解析解。

证明　由定理 1.1、定理 1.2 或定理 1.3 可找到辅助方程(0.2)的一个形如式(1.4)的解析解 $y(z)$,且满足 $y(0)=\frac{1}{\alpha\zeta}$,$y'(0)=\eta\neq0$,显然,反函数 $y^{-1}(z)$在 $y(0)=\frac{1}{\alpha\zeta}$的邻域内存在且解析。设 $x(z)=y(\alpha y^{-1}(z))$,则 $x(z)$在 $\frac{1}{\alpha\zeta}$的邻域内解析。又 $x^{[i]}(z)=y(\alpha^i y^{-1}(z))$,$i=1,2,\cdots$,$x'(z)=y'(\alpha y^{-1}(z))\cdot\alpha\cdot\frac{1}{y'(y^{-1}(z))}=\frac{\alpha y'(\alpha y^{-1}(z))}{y'(y^{-1}(z))}$,因此,$\frac{1}{c_0z+c_1x(z)+c_2x(x(z))+\cdots+c_mx^{[m]}(z)}=\frac{1}{c_0z+c_1y(\alpha y^{-1}(z))+c_2y(\alpha^2y^{-1}(z))+\cdots+c_my(\alpha^my^{-1}(z))}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{m}c_ky(\alpha^ky^{-1}(z))}$。由式(0.2)得

$$x'(x^{[r]}(z))=\frac{\alpha y'(\alpha y^{-1}y(\alpha^ry^{-1}(z)))}{y'(y^{-1}y(\alpha^ry^{-1}(z)))}=\frac{\alpha y'(\alpha^{r+1}y^{-1}(z))}{y'(\alpha^ry^{-1}(z))}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{m}c_ky(\alpha^ky^{-1}(z))},$$

所以

$$x'(x^{[r]}(z))=\frac{1}{c_0z+c_1x(z)+c_2x(x(z))+\cdots+c_mx^{[m]}(z)}。$$

这说明方程(0.1)在原点的邻域内有一个形如 $x(z)=y(\alpha y^{-1}(z))$的解析解。又有 $x\left(\frac{1}{\alpha\zeta}\right)=y\left(\alpha y^{-1}\left(\frac{1}{\alpha\zeta}\right)\right)=y(0)=\frac{1}{\alpha\zeta}$,$x'\left(\frac{1}{\alpha\zeta}\right)=\frac{\alpha y'(0)}{y'(0)}=\alpha$。定理 2.1 得证。

参考文献:

[1] EDER E. The functional differential equation $x'(t)=x(x(t))$[J]. J Diff Eqs, 1984, 54:390-400.

[2] STANEK S. On global properties of solutions of functional differential equation $x'(t)=x(x(t))+x(t)$[J]. Dyna sys Appl, 1995, 4:263-278.

[3] XU Bing, ZHANG Weinian, SI jianguo. Analytic solutions of an iterative functional differential equation which may violate the diophantine condition[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2004, 10(2):201-211.

[4] SI Jianguo, ZHANG Weinian, Gwang-Hui Kim. Analytic solutions of an iterative functional differential equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 150:647-659.

[5] SI Jianguo, CHENG Suisun. Note on an iterative functional differential equation[J]. Demonstratio Math, 1998, 31(3):609-614.

[6] MCKIERNAN M A. The functional differential equation $Df=1/ff$[J]. Proc Am Math Soc, 1957, 8:230-233.

[7] BRJUNO A D. Analytic form of differential equations[J]. Trans Moscow Math Soc, 1971, 25:131-288.

[8] CARLETTI T, MARMI S. Linearization of analytic and non-analytic germs of diffeomorphisms of (C,0)[J]. Bull Soc Math France, 2000, 128:69-85.

[9] DAVIE A M. The critical function for the semistandard map[J]. Nonlinearity, 1994, 7:219-229.

(编辑:孙培芹)