文章编号:1671-9352(2009)10-0036-03

一类奇异次线性 Sturm-Liouville 边值问题

姚庆六
(南京财经大学应用数学系,江苏 南京 210003)

摘要: 研究了一类次线性 Sturm-Liouville 边值问题的正解,其中允许非线性项 $f(t,u)$ 在 $t=0$, $t=1$ 和 $u=0$ 处奇异。主要工具是相关线性问题的 Green 函数及相应的 Hammerstein 积分方程。通过考察非线性项在 $u=0$ 和 $u=+\infty$ 处的增长特性并且利用锥上的 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理证明了一个新的存在定理。

关键词: 奇异常微分方程; Sturm-Liouville 边值问题; 正解; 存在定理
中图分类号: O175.8 **文献标志码:** A

A class of singular sublinear Sturm-Liouville boundary value problems

YAO Qing-liu
(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, Jiangsu, China)

Abstract: The positive solution is studied for a class of sublinear Sturm-Liouville boundary value problems, where the nonlinear term $f(t,u)$ is allowed to be singular at $t=0$, $t=1$ and $u=0$. The main tools are the Green function of the related linear problem and the corresponding Hammerstein integral equation. By considering the growth features of the nonlinear term at $u=0$ and $u=+\infty$, and applying the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem on a cone, a new existence theorem is proved.

Key words: singular ordinary differential equation; Sturm-Liouville boundary value problem; positive solution; existence theorem

本文研究下列奇异 Sturm-Liouville 边值问题的正解存在性:

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases}(p(t)u'(t))'+f(t,u(t))=0, & 0<t<1,\\ au(0)-bp(0)u'(0)=0, & cu(1)+dp(1)u'(1)=0。\end{cases}$$

问题(P)的正解 u^* 是指 (P) 满足 $u^*(t)>0$, $0<t<1$ 的解,而问题 (P) 的奇异性主要是指 $f(t,u)$ 关于状态变元 u 在 $u=0$ 处的奇异性。换句话说,允许对于任何 $t\in[0,1]$, $\lim\limits_{u\to+0}f(t,u)=+\infty$ 或者不存在。

本文始终假设:(H1) a,b,c,d 均为非负数并且 $ac+ad+bc>0$;(H2) $0<\alpha<\beta<1$;(H3) 函数 $p:[0,1]\to(0,+\infty)$ 连续。

本文记 $G(t,s)$ 为 (P) 的相关线性问题 Green 函数,即

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\left(b+a\displaystyle\int_0^s\frac{\mathrm{d}\tau}{p(\tau)}\right)\left(d+c\displaystyle\int_t^1\frac{\mathrm{d}\tau}{p(\tau)}\right), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\rho}\left(b+a\displaystyle\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{p(\tau)}\right)\left(d+c\displaystyle\int_s^1\frac{\mathrm{d}\tau}{p(\tau)}\right), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $\rho=ac\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{p(t)}+bc+ad$,又设 $A=\left[\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\displaystyle\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s\right]^{-1}$。

问题 (P) 可以描述许多物理现象,例如非线性源生成的扩散以及化学气体的爆燃。因而对它的研究历来受到广泛重视。当 $f(t,u)$ 为关于 u 的连续函数时,问题(P)的正解存在性已经获得了不少结果[1-5]。例如在文献[3] 推论 3.6 中证明了如下正解存在定理:

收稿日期: 2009-03-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871059)
作者简介: 姚庆六(1946-),男,教授,研究方向为非线性常微分方程.Email:yaoqingliu2002@hotmail.com

定理 1[3]　假设 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续,$0<\lim\limits_{u\to+0}\min\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}f(t,u)<+\infty$ 并且 $\lim\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,u)/u<A$,则问题($P$)至少有一个正解。

近年来各种奇异边值问题的研究[6-10]日益受到人们的关注。本文将放弃 $f(t,u)$ 的连续性假设,进而考察奇异问题(P)并推广定理 1。本文还将使用下列条件:

(H4) $f:(0,1)\times(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续;

(H5) 存在连续函数 $g:[0,1]\times(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 及非负函数 $h\in C(0,1)\cap L^1[0,1]$ 使得 $f(t,u)\leqslant g(t,u)+h(t)$, $(t,u)\in(0,1)\times(0,+\infty)$;

(H6) 对于每一对正数 $0<r_1<r_2$,存在一个非负函数 $j_{r_1}^{r_2}\in L^1[0,1]$ 使得 $g(t,u)\leqslant j_{r_1}^{r_2}(t)$, $0<t<1$, $r_1q(t)\leqslant u\leqslant r_2$,其中

$$q(t)=\min\left\{\frac{b+a\int_0^t\frac{ds}{p(s)}}{b+a\int_0^1\frac{ds}{p(s)}},\frac{d+c\int_t^1\frac{ds}{p(s)}}{d+c\int_0^1\frac{ds}{p(s)}}\right\}。$$

注意到 $g(t,u)$ 可以在 $u=0$ 处奇异,条件(H4)~(H6)表明允许非线性项 $f(t,u)$ 在 $t=0$, $t=1$ 和 $u=0$ 处奇异。如果 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续,则条件(H4)~(H6)自然成立。

此外容易看出当 $bd>0$ 时,$\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}q(t)=\min\left\{\frac{b}{b+a\int_0^1\frac{ds}{p(s)}},\frac{d}{d+c\int_0^1\frac{ds}{p(s)}}\right\}>0$。此时令 $j_{r_1}^{r_2}(t)=\max\{g(t,u):r_1\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}q(t)\leqslant u\leqslant r_2\}$,则 $j_{r_1}^{r_2}\in C[0,1]$ 并且条件(H6)成立。

本文获得了下列正解存在定理。

定理 2　假设(H4)~(H6)成立,$0<\liminf\limits_{u\to+0}\min\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}f(t,u)\leqslant+\infty$ 并且 $\limsup\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}g(t,u)/u<A$,则问题($P$)至少有一个正解。

定理 2 与定理 1 的不同在于允许 $\lim\limits_{u\to+0}\min\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}f(t,u)=+\infty$ 或者不存在。下例表明定理 2 改进了定理 1。

考察 Sturm-Liouville 边值问题:

$$\begin{cases}u''(t)+\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}+\sin\dfrac{1}{u(t)}=0, & 0<t<1,\\ u(0)-u'(0)=0, & u(1)=0。\end{cases}$$

在这个例子中 $f(t,u)=\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}+\sin\dfrac{1}{u}$。

因为 $\min\limits_{0<t<1}\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}=2$,知 $\liminf\limits_{u\to+0}\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,u)=1>0$。令 $g(t,u)=\sin\dfrac{1}{u}+1$, $h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}-1$,则 $g(t,u)\leqslant 2$, $(t,u)\in[0,1]\times(0,+\infty)$ 并且 $\limsup\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}g(t,u)/u=0$,根据定理 2 可知问题($P$)有一个正解。不过因为 $f(t,u)$ 在 $u=0$ 处奇异并且 $\lim\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,u)/u=+\infty$,这一结论不能从定理 1 中推出,这个例子表明本文的改进是本质的。

定理 2 的证明　记 Banach 空间 $C[0,1]$ 中的范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$,

$$K=\{u\in C[0,1]:u(t)\geqslant\|u\|q(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\},$$
$$K[r_1,r_2]=\{u\in K:r_1\leqslant\|u\|\leqslant r_2\},$$

易知 K 是 $C[0,1]$ 中的非负函数锥。定义算子 T 为

$$(Tu)(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,u(s))ds,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ u\in K\setminus\{0\}。$$

步骤 1　证明对于任何 $0<r_1<r_2$, $T:K[r_1,r_2]\to K$ 全连续。记

$$(Ju)(t)=f(t,u(t)),\quad (Su)(t)=\int_0^1G(t,s)u(s)ds。$$

设 $u_n\in K[r_1,r_2]$, $n=0,1,2,\cdots$ 并且 $\|u_n-u_0\|\to 0$。由条件(H4)知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(t,u_n(t))=f(t,u_0(t))$, $0<t<1$,同时由锥 K 的定义 $r_1q(t)\leqslant\|u_n\|q(t)\leqslant u_n(t)\leqslant r_2$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $n=1,2,\cdots$。根据条件(H5)

和(H6),存在非负函数 $j_{r_1}^{r_2} \in L^1[0,1]$ 使得对于每一个 $n = 1,2,\cdots, f(t,u_n(t)) \leqslant j_{r_1}^{r_2}(t) + h(t)$, $0 < t < 1$,根据 Lebesgue 控制收敛定理则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))|\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} |f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))|\,\mathrm{d}s = 0。$$

这说明 $J: K[r_1,r_2] \to L^1[0,1]$ 连续。其次利用 Arzela-Ascoli 定理可证 $S: L^1[0,1] \to C[0,1]$ 全连续。于是 $T = S \circ J: K[r_1,r_2] \to C[0,1]$ 全连续。此外仿照[2]中引理2.4可证 $T: K[r_1,r_2] \to K$。

步骤2 因 $\liminf\limits_{u\to+0} \min\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} f(t,u) > 0$,知存在 $\eta_1 > 0$ 及 $L > 0$ 使得 $f(t,u) \geqslant L$, $(t,u) \in [\alpha,\beta] \times (0,\eta_1]$。设

$$B = \left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\alpha^\beta G(t,s)\mathrm{d}s\right]^{-1},\ \bar{r}_1 = \min\{\eta_1, LB^{-1}\},$$

则 $f(t,u) \geqslant \bar{r}_1 B$, $(t,u) \in [\alpha,\beta] \times (0,\eta_1]$。

如果 $u \in K$ 且 $\|u\| = \bar{r}_1$,则 $0 \leqslant \bar{r}_1 q(t) \leqslant u(t) \leqslant \bar{r}_1 \leqslant \eta_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,故

$$\|Tu\| \geqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\alpha^\beta G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant \bar{r}B \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\alpha^\beta G(t,s)\mathrm{d}s = \bar{r} = \|u\|。$$

因 $\limsup\limits_{u\to+\infty} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t,u)/u < A$,知 $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\{A - \limsup\limits_{u\to+\infty} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t,u)/u\} > 0$,于是存在 $\eta_2 > \bar{r}_1$ 使得

$$g(t,u) \leqslant (A - 2\varepsilon)u,\quad (t,u) \in [0,1] \times [\eta_2, +\infty)。$$

设 $j_{\bar{r}_1}^{\eta_2}$ 如同条件(H6),则 $g(t,u) \leqslant j_{\bar{r}_1}^{\eta_2}(t)$, $0 < t < 1, \bar{r}_1 q(t) \leqslant u \leqslant \eta_2$。选择 $\bar{r}_2 \geqslant \eta_2$ 使得

$$\varepsilon \bar{r}_2 A^{-1} \geqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\max\{j_{\bar{r}_1}^{\eta_2}(s), h(s)\}\mathrm{d}s。$$

如果 $u \in K$ 并且 $\|u\| = \bar{r}_2$,则 $0 \leqslant \bar{r}_2 q(t) \leqslant u(t) \leqslant \bar{r}_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。记 $e_u = \{t \in [0,1]: u(t) \leqslant \eta_2\}$,则 $g(t,u(t)) \leqslant j_{\bar{r}_1}^{\eta_2}(t), t \in e_u$ 并且 $g(t,u(t)) \leqslant (A - 2\varepsilon)u(t) \leqslant (A - 2\varepsilon)\bar{r}_2, t \in [0,1] \setminus e_u$。由此推出

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s \leqslant \\
&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{e^u} G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{[0,1]\setminus e_u} G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s + \varepsilon\bar{r}_2 A^{-1} \leqslant \\
&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{e^u} G(t,s)j_{\bar{r}_1}^{\eta_2}(s)\mathrm{d}s + (A - 2\varepsilon)\bar{r}_2 \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{[0,1]\setminus e_u} G(t,s)\mathrm{d}s + \varepsilon\bar{r}_2 A^{-1} \leqslant \\
&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)j_{\bar{r}_1}^{\eta_2}(s)\mathrm{d}s + (A - 2\varepsilon)\bar{r}_2 \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s + \varepsilon\bar{r}_2 A^{-1} \leqslant \\
&\varepsilon\bar{r}_2 A^{-1} + (A - 2\varepsilon)\bar{r}_2 A^{-1} + \varepsilon\bar{r}_2 A^{-1} = \bar{r}_2 = \|u\|。
\end{aligned}$$

根据锥压缩与锥拉伸型的 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理,算子 T 有一个不动点 $u^* \in K[\bar{r}_1, \bar{r}_2]$。易验证 u^* 也是问题(P)的解,因为 $u^*(t) \geqslant \bar{r}_1 q(t) > 0$, $0 < t < 1$,知 u^* 为正解。

参考文献:

[1] ANURADHA V, HAI D D, SHIVAJI R. Existence results for superlinear semipositone BVP's [J]. Proc Amer Math Soc, 1996, 124(5):757-763.

[2] 姚庆六. Sturm-Liouville 边值问题的正解存在性 [J]. 数学物理学报, 2002, 22A(2):145-149.

[3] YAO Q. Existence of n solutions to a semipositone Sturm-Liouville boundary value problem [J]. 数学进展, 2004, 33(6):719-725.

[4] 王俊禹, 高文杰, 张中新. Sturm-Liouville 边值问题解的非存在性, 存在性和多重性结果[J]. 数学学报:中文版, 2005, 48(4):739-746.

[5] 孙经先, 张国伟. 奇异非线性 Sturm-Liouville 问题的正解 [J]. 数学学报:中文版, 2005, 48(6):1095-1104.

[6] AGARWAL R P, O'REGAN D. Twin solutions to singular Dirichlet problems[J]. J Math Anal Appl, 1999, 240(3):433-445.

[7] 姚庆六. 一类奇异次线性两点边值问题的正解[J]. 应用数学学报, 2001, 22(4):522-526.

[8] WEI Z. A class of fourth order singular boundary value problems [J]. Appl Math Comput., 2004, 153(6):865-884.

[9] 张国伟, 孙经先. 一类奇异两点边值问题的正解 [J]. 应用数学学报:中文版, 2006, 29(3):297-310.

[10] YAO Q. Existence and multiplicity of positive solutions to a singular elastic beam equation rigidly fixed at both ends [J]. Nonlinear Anal TMA, 2008, 69(8):2683-2694.

(编辑:陈丽萍)