文章编号:1671-9352(2008)05-0082-05

锥度量空间中广义压缩映象及映象对的不动点定理

袁清[1],高建军[2],王延伟[2]
(1. 杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036; 2. 山东大学工程训练中心, 山东 济南 250061)

摘要:自锥度量空间的概念被提出以来,已经有数位学者对其结构和性质进行了探讨,本文研究了锥度量空间中的广义压缩映象不动点的存在性问题,放宽了映象的压缩条件,同时本文还研究了锥度量空间中广义压缩映象对的公共不动点的存在性问题。这些结论推广了近期的结论,同时也是对度量空间中经典结论的推广。

关键词:锥度量空间;不动点;广义压缩映象;压缩映象对
中图分类号:O177.91 **文献标志码:**A

Fixed point theorems for the generalized contractive mappings and mapping pairs in cone metric spaces

YUAN Qing[1], GAO Jian-jun[2], WANG Yan-wei[2]
(1. School of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, Zhejiang, China;
2. Engineering Training Center, Shandong University, Jinan 250061, Shandong, China)

Abstract: Since the notation of cone metric spaces was raised, several authors have studied its constructions and properties. The results on the existence of fixed points of generalized contractive mappings were extended by relaxing the contractive conditions. The existence of common fixed points of generalized contractive mapping pairs was also discussed. The obtained results extend the recent relative results and the classical theorems in metric spaces.

Key words: cone metric spaces; fixed points; generalized contractive mappings; contractive mapping pairs

0 前言

在本文中,始终设 E 为实 Banach 空间,P 是 E 的子集且 $\mathrm{int}\,P\neq\phi$($\mathrm{int}\,P$ 表示 P 的内部)。

定义 0.1[1,2] P 称为锥如果:

(1) P 是非空闭集且 $P\neq\{0\}$;

(2) 如果 $a,b\in\mathbf{R}$, $a,b\geqslant 0$, $x,y\in P$,则 $ax+by\in P$;

(3) 如果 $x\in P$ 且 $x\in -P$,则 $x=0$。

定义 0.2 给定一个锥 P 后,引入半序“$\leqslant$”为:$x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in P$。记 $x<y$ 当且仅当 $x\leqslant y$ 而 $x\neq y$;$x\ll y$ 当且仅当 $y-x\in\mathrm{int}\,P$。则显然有,如果 $a\leqslant b$, $c\leqslant d$,则 $a+c\leqslant b+d$;对 $\lambda\in\mathbf{R}$,$\lambda\geqslant 0$,有 $\lambda a\leqslant\lambda b$。

锥 P 称为正规的,如果存在 $K>0$ 使得对所有 $x,y\in E$ 且 $0\leqslant x\leqslant y$ 有 $\|x\|\leqslant K\|y\|$。满足上式的最小的 K 称为 P 的正规常数。

收稿日期:2007-11-07
作者简介:袁清(1980-),男,博士研究生,研究方向为非线性泛函分析. Email: yuanqingbuaa@hotmail.com

定义 0.3[1] 设 X 为非空集合，映射 $d: X\times X\to E$ 满足：

(d1) $0\leqslant d(x,y)$, $\forall\, x,y\in X$; $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(d2) $d(x,y)=d(y,x)$, $\forall\, x,y\in X$；

(d3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$, $\forall\, x,y,z\in X$。

则称 d 为 X 上的一个锥度量，(X,d) 称为一个锥度量空间。

定义 0.4[1] 设 (X,d) 是一个锥度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中序列，$x\in X$。如果对任意的 $c\in E$, $0\ll c$，存在正整数 N 使得当 $n>N$ 时，有 $d(x_n,x)\ll c$，则称 $\{x_n\}$ 是收敛的，或称 $\{x_n\}$ 收敛到 x，或 x 是 $\{x_n\}$ 的极限。记为 $\lim_{n\to\infty} x_n=x$，或者 $x_n\to x$, $(n\to\infty)$。

如果对任意 $c\in E$, $0\ll c$，存在正整数 N 使得当 $n,m>N$ 时，有 $d(x_n,x_m)\ll c$，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列。如果 (X,d) 中每一个 Cauchy 列都是收敛的，则称 (X,d) 是完备的锥度量空间。

引理 0.1[1] 设 (X,d) 是锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\, P\neq\phi$，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列。则 $\{x_n\}$ 收敛到 x 当且仅当 $d(x_n,x)\to 0$, $(n\to\infty)$。

引理 0.2[1] 设 (X,d) 是锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\, P\neq\phi$，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列。如果 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 的极限是惟一的。

引理 0.3[1] 设 (X,d) 是锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\, P\neq\phi$，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列。则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列当且仅当 $d(x_n,x_m)\to 0$, $(n,m\to\infty)$。

引理 0.4 [1] 设 (X,d) 是锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\, P\neq\phi$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是 X 中的序列，$x_n\to x$, $y_n\to y$, $(n\to\infty)$，则 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$, $(n\to\infty)$。

1 广义压缩映象的不动点定理

引理 1.1 设 (X,d) 是锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\, P\neq\phi$。$\{x_n\}$ 是 X 中的序列，满足：

$$d(x_{n+1},x_n)\leqslant hd(x_n,x_{n-1}),\ \forall\, n,$$

其中 $h\in[0,1)$，则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。

证明

$$d(x_{n+1},x_n)\leqslant hd(x_n,x_{n-1})\leqslant h^2 d(x_{n-1},x_{n-2})\leqslant\cdots\leqslant h^n d(x_1,x_0)。$$

所以对 $n>m$，

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x_{n-1})+d(x_{n-1},x_{n-2})+\cdots+d(x_{m+1},x_m)\leqslant$$
$$(h^{n-1}+h^{n-2}+\cdots+h^m)d(x_1,x_0)\leqslant\frac{h^m}{1-h}d(x_1,x_0)。$$

所以得到 $\|d(x_n,x_m)\|\leqslant K\dfrac{h^m}{1-h}\|d(x_1,x_0)\|$，因而 $\|d(x_n,x_m)\|\to 0$, $(n,m\to\infty)$，于是有：

$$\|d(x_n,x_m)\|\to 0, (n,m\to\infty),$$

所以由引理 0.3，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。

定理 1.1 设 (X,d) 是完备的锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\, P\neq\phi$。$T: X\to X$ 是 X 中映象，存在正整数 r 和常数 $a_i\in[0,1)$, $i=1,2,\cdots,5$, $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i<1$，使得：

$$d(T^rx,T^ry)\leqslant a_1d(x,T^rx)+a_2d(y,T^ry)+a_3d(x,T^ry)+a_4d(y,T^rx)+a_5d(x,y),$$

$\forall\, x,y\in X$。则 T 在 X 中有惟一不动点。

证明 取 $x_0\in X$，令 $x_1=Tx_0$, $x_2=Tx_1=T^2x_0$, $x_{n+1}=Tx_n=T^{n+1}x_0$, $\cdots$。

(1) 当 $r=1$ 时；

$$d(x_n,x_{n+1})=d(Tx_{n-1},Tx_n)\leqslant a_1d(x_{n-1},Tx_{n-1})+a_2d(x_n,Tx_n)+a_3d(x_{n-1},Tx_n)+$$
$$a_4d(x_n,Tx_{n-1})+a_5d(x_{n-1},x_n)=a_1d(x_{n-1},x_n)+a_2d(x_n,x_{n+1})+$$
$$a_3d(x_{n-1},x_{n+1})+a_5d(x_{n-1},x_n),$$

类似的有:

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant a_1d(x_n,Tx_n)+a_2d(x_{n-1},Tx_{n-1})+a_3d(x_n,Tx_{n-1})+a_4d(x_{n-1},Tx_n)+a_5d(x_n,x_{n-1})=a_1d(x_n,x_{n+1})+a_2d(x_{n-1},x_n)+a_4d(x_{n-1},x_{n+1})+a_5d(x_n,x_{n-1}),$$

上述两个不等式相加得:

$$2d(x_n,x_{n+1})\leqslant(a_1+a_2+2a_5)d(x_{n-1},x_n)+(a_1+a_2)d(x_n,x_{n+1})+(a_3+a_4)d(x_{n-1},x_{n+1})\leqslant(a_1+a_2+2a_5)d(x_{n-1},x_n)+(a_1+a_2)d(x_n,x_{n+1})+(a_3+a_4)d(x_{n-1},x_n)+(a_3+a_4)d(x_n,x_{n+1})=(a_1+a_2+2a_5+a_3+a_4)d(x_{n-1},x_n)+(a_1+a_2+a_3+a_4)d(x_n,x_{n+1}),$$

所以

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\frac{a_1+a_2+2a_5+a_3+a_4}{2-a_1-a_2-a_3-a_4}d(x_{n-1},x_n)。$$

因为 $0\leqslant a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<1$,则 $0\leqslant 2a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5<2$ 从而 $0\leqslant a_1+a_2+2a_5+a_3+a_4<2-a_1-a_2-a_3-a_4$,所以:

$$0\leqslant\frac{a_1+a_2+2a_5+a_3+a_4}{2-a_1-a_2-a_3-a_4}<1。$$

由引理 1.1 得知$\{x_n\}$是 Cauchy 列。所以由 X 的完备性得$\{x_n\}$收敛到某点 p。

接下来证明 $Tp=p$,

$$d(Tp,p)\leqslant d(Tx_n,Tp)+d(Tx_n,p)\leqslant a_1d(x_n,Tx_n)+a_2d(p,Tp)+a_3d(x_n,Tp)+a_4d(p,Tx_n)+a_5d(x_n,p)+d(Tx_n,p)\leqslant a_1d(x_n,Tx_n)+a_2d(p,Tp)+a_3d(x_n,p)+a_3d(p,Tp)+a_4d(p,Tx_n)+a_5d(x_n,p)+d(Tx_n,p)=a_1d(x_n,x_{n+1})+(a_2+a_3)d(p,Tp)+(a_3+a_5)d(x_n,p)+(1+a_4)d(x_{n+1},p),$$

所以

$$(1-a_2-a_3)d(Tp,p)\leqslant a_1d(x_n,x_{n+1})+(a_3+a_5)d(x_n,p)+(1+a_4)d(p,x_{n+1})。$$

因为 $\sum_{i=1}^{5}a_i<1$,$1-a_2-a_3>0$,所以有

$$0\leqslant(1-a_2-a_3)\|d(Tp,p)\|\leqslant K(a_1\|d(x_n,x_{n+1})\|+(a_3+a_5)\|d(x_n,p)\|+(1+a_4)\|d(p,x_{n+1})\|)\to 0,\ n\to\infty,$$

所以 $\|d(Tp,p)\|=0$,于是有 $Tp=p$。

设 q 是 T 的另一个不动点,则

$$d(p,q)=d(Tp,Tq)\leqslant a_1d(p,Tp)+a_2d(q,Tq)+a_3d(p,Tq)+a_4d(q,Tp)+a_5d(p,q)=(a_3+a_4+a_5)d(p,q)。$$

因为 $a_3+a_4+a_5<1$,所以 $d(p,q)=0$,于是有 $p=q$。

(2) 当 $r\neq 1$ 时,由(1),T^r有惟一不动点。

下面证明 T 和 T^r有相同的不动点集,即 $F(T)=F(T^r)$。$\forall p\in F(T)$,$T(p)=p$。则 $T^2(p)=T(p)=p,\cdots,T^r(p)=p$,即 $p\in F(T^r)$。

$\forall p\in F^r(T)$,$T^r(p)=p$。则 $T^r(Tp)=T^{r+1}(p)=T(T^rp)=Tp$,即 Tp 也是 T^r 的不动点。由 T^r 的不动点的惟一性,得 $Tp=p$。所以 $p\in F(T)$。

2　压缩映象对的不动点定理

定理 2.1　设(X,d)是完备的锥度量空间,P 为正规常数为 K 的正规锥,$\mathrm{int}\,P\neq\phi$。$T,S:X\to X$ 是 X 中映象对满足存在正整数 t,s 和常数 $k\in[0,\frac{1}{2})$,使得:

$$d(T^t x, S^s y) \leqslant k(d(T^t x, x) + d(y, S^s y)), \forall x, y \in X,$$

则 T, S 在 X 中存在惟一公共不动点 p。

证明 取 $x_0 \in X$,令 $x_{2N+1} = Tx_{2N}, x_{2N} = Sx_{2N-1}$。

(1) 当 $t = s = 1$ 时

$$d(x_{2N+1}, x_{2N}) = d(Tx_{2N}, Sx_{2N-1}) \leqslant k(d(Tx_{2N}, x_{2N}) + d(x_{2N-1}, Sx_{2N-1})) = k(d(x_{2N+1}, x_{2N}) + d(x_{2N-1}, x_{2N}))$$

所以有 $d(x_{2N+1}, x_{2N}) \leqslant \frac{k}{1-k} d(x_{2N}, x_{2N-1})$。

类似的有:

$$d(x_{2N+2}, x_{2N+1}) = d(Sx_{2N+1}, Tx_{2N}) = d(Tx_{2N}, Sx_{2N+1}) \leqslant k(d(Tx_{2N}, x_{2N}) + d(x_{2N+1}, Sx_{2N+1})) = k(d(x_{2N+1}, x_{2N}) + d(x_{2N+1}, x_{2N+2})),$$

所以:

$$d(x_{2N+2}, x_{2N+1}) \leqslant \frac{k}{1-k} d(x_{2N+1}, x_{2N})。$$

综上所述:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}), \forall n。$$

因为 $0 \leqslant k < \frac{1}{2}$,则 $0 \leqslant 2k < 1$,则 $0 \leqslant k < 1-k$,$0 \leqslant \frac{k}{1-k} < 1$,所以由引理 1.1 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列,故由 X 的完备性必收敛到 X 中某点 p。

下面证明 $Tp = p$。

$$d(Tp, p) \leqslant d(Tp, Sx_{2N-1}) + d(Sx_{2N-1}, p) \leqslant k(d(Tp, p) + d(Sx_{2N-1}, x_{2N-1})) + d(x_{2N}, p),$$

所以有

$$0 \leqslant d(Tp, p) \leqslant \frac{1}{1-k} kd(x_{2N}, x_{2N-1}) + d(x_{2N}, p)。$$

于是

$$\| d(Tp, p) \| \leqslant \frac{1}{1-k} K(\| kd(x_{2N}, x_{2N-1}) \| + \| d(x_{2N}, p) \|) \to 0。$$

所以有 $\| d(Tp, p) \| = 0$,故 $Tp = p$。同理可以证明 $Sp = p$。所以 p 是 T, S 的公共不动点。

设 q 是 T, S 的另一个公共不动点,则:

$$d(p, q) = d(Tp, Sq) \leqslant k(d(Tp, p) + d(q, Sq)) = 0。$$

所以 $d(p, q) = 0$ 即 $p = q$。

(2) 当 t, s 至少一个不等于 1 时

由(1),T^t 和 S^s 有惟一不动点 p,下面证明 p 也是 T, S 的公共不动点。

因为 $T^t p = p$,所以 $T^t(Tp) = T^{t+1}(p) = T(T^t p) = Tp$,所以 Tp 也是 T^t 的不动点,而

$$d(S^s Tp, Tp) \leqslant d(S^s Tp, T^t Tp) + d(T^t Tp, Tp) \leqslant k(d(T^t Tp, Tp) + d(Tp, S^s Tp)) = kd(Tp, S^s Tp)$$

因为 $k \in [0, \frac{1}{2})$ 所以 $d(S^s Tp, Tp) = 0$,即 $S^s Tp = Tp$。所以 Tp 也是 T^t 和 S^s 的公共不动点。和 S^s 公共不动点的惟一性得 $Tp = p$。同理可证 $Sp = p$。

若 p 是 S, T 的公共不动点,则显然 p 也是 T^t 和 S^s 的公共不动点。所以 S, T 和 T^t, S^s 有相同的公共不动点集,从而易得惟一性。

定理 2.2 设(X, d)是完备的锥度量空间,P 为正规常数为 K 的正规锥,$\text{int}\, P \neq \phi$。$T, S: X \to X$ 是 X 中映象对满足存在正整数 t, s 和常数 $k \in [0, \frac{1}{2})$,使得:

$$d(T^t x, S^s y) \leqslant k(d(T^t x, y) + d(x, S^s y)), \forall x, y \in X$$

则 T, S 在 X 中存在惟一公共不动点 p。

用定理 2.1 的方法类似可证，此处省略。

注 2.1　将文献[1]中的定理 1，定理 3，定理 4 推广到了广义压缩映象和映象对的情况。

推论 2.1　设(X,d)是完备的锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\,P\neq\phi$。$T:X\to X$ 是 X 中映象满足，存在 $k\in[0,1)$，使得：$d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y)$，$\forall\, x,y\in X$，则 T 在 X 中存在惟一不动点。且对任意 $x\in X$，迭代序列 $x_n=T^nx$，$(n=1,2,3\cdots)$，收敛到 T 的不动点。

证明　在定理 1.1 中令 $r=1$，$a_1=a_2=a_3=a_4=0$。

此推论即文献[1]中的定理 1。

推论 2.2　设(X,d)是完备的锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\,P\neq\phi$。$T:X\to X$ 是 X 中映象，存在 $k\in[0,\frac{1}{2})$，使得：$d(Tx,Ty)\leqslant k(d(Tx,x)+d(y,Ty))$，$\forall\, x,y\in X$，则 T 在 X 中存在惟一不动点。且对任意 $x\in X$，迭代序列 $x_n=T^nx$，$(n=1,2,3\cdots)$收敛到 T 的不动点。

证明　在定理 2.1 中令 $t=s=1$，$T=S$，或在定理 1.1 中令 $r=1$，$a_1=a_2$，$a_3=a_4=a_5=0$，此推论即文献[1]中的定理 3。

推论 2.3　设(X,d)是完备的锥度量空间，P 为正规常数为 K 的正规锥，$\mathrm{int}\,P\neq\phi$。$T:X\to X$ 是 X 中映象满足，存在 $k\in[0,\frac{1}{2})$，使得 $d(Tx,Ty)\leqslant k(d(Tx,y)+d(Ty,x))$，$\forall\, x,y\in X$。则 T 在 X 中存在惟一不动点。且对任意 $x\in X$，Picard 迭代序列 $x_n=Tx_{n-1}=T^nx$，$(n=1,2,3\cdots)$收敛到 T 的不动点。

证明　在定理 2.2 中令 $t=s=1$，$T=S$，或在定理 1.1 中令 $r=1$，$a_3=a_4$，$a_1=a_2=a_5=0$。此推论即文献[1]中的定理 4。

注 2.2　如果(X,d)是度量空间，定理中的广义压缩映象退化到文献[3]中的压缩映象的定义。所以把关于文献[3]中定义的压缩映象的结果从度量空间推广到了锥度量空间。

最后，用新的方法更容易地说明文献[1]中给出的映象存在惟一不动点：

例[1]　设 $X=\{(x,0)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{(0,x)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$。取正规锥 $P=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x,y\geqslant 0\}$，定义完备的锥度量为：

$$d((x,0),(y,0))=\left(\frac{4}{3}|x-y|,|x-y|\right),$$

$$d((0,x),(0,y))=\left(|x-y|,\frac{2}{3}|x-y|\right),$$

$$d((x,0),(0,y))=d((0,y),(x,0))=\left(\frac{4}{3}x+y,x+\frac{2}{3}y\right)。$$

定义 $T:X\to X$ 为：

$$T((x,0))=(0,x),T((0,x))=\left(\frac{1}{2}x,0\right),$$

则可以验证 T 满足：

$$d(T((x_1,x_2)),T((y_1,y_2)))\leqslant\frac{3}{4}d((x_1,x_2),(y_1,y_2)),\forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X,$$

实际上，容易得到

$$T^2((x,0))=\left(\frac{1}{2}x,0\right),T^2((0,x))=\left(0,\frac{1}{2}x\right)。$$

很容易验证在一般的欧氏度量下 T 满足定理 1.1 中的压缩条件$(r=2)$，故存在惟一不动点。

参考文献：

[1] HUANG Longguang, ZHANG Xian. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings[J]. J Math Anal Appl, 2007, 332:1468-1476.

[2] 郭大钧.非线性泛函分析[M].第 2 版.济南：山东科学技术出版社，2001:235-244.

[3] RHOADES B E. Comparison of various definition of contractive mappings[J]. Trans Amer Math Soc, 1977, 266:257-290.

（下转第 92 页）

(上接第86页)

[4] CHATTERJEA S K. Fixed-point theorems[J]. C R Acad Bulgare Sci, 1972, 25:727-730.
[5] HARDY G E, ROGERS T D. A generalization of a fixed point theorem of Reich[J]. Canad Math Bull, 1973, 16:201-206.
[6] KANNAN. Some results on fixed point II[J]. Amer Math Monthly, 1969, 76:405-408.

(编辑:陈丽萍)