文章编号:1671-9352(2008)05-0066-05

上下解方法与三点边值共振问题的可解性

徐玲

(西北师范大学数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 运用紧向量场方程的解集连通理论为二阶三点边值共振问题

$$\begin{cases} u''(t)=f(t,u(t),u'(t)), t\in[0,1], \\ u'(0)=0, \quad u(1)=u(\eta) \end{cases}$$

发展上下解方法, 其中常数 $\eta\in(0,1)$, 函数 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 连续且满足 Nagumo 条件。

关键词: 连通集; 上下解; 共振; 存在性

中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A

Methods of lower and upper solutions and the solvability of a three-point boundary value problem at resonance

XU Ling

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The methods of lower and upper solutions for a second order three-point boundary value problem at resonance

$$\begin{cases} u''(t)=f(t, u(t), u'(t)), t\in[0,1], \\ u'(0)=0, u(1)=u(\eta) \end{cases}$$

were developed by using the connectivity properties of the solution sets of parameterized families of compact vector fields, where $\eta\in(0,1)$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ is continuous and satisfies the Nagumo condition.

Key words: connected sets; lower and upper solutions; resonance; existence

0 引言

本文讨论非线性常微分方程二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)=f(t, u(t), u'(t)), t\in[0,1], \\ u'(0)=0, u(1)=u(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

的可解性, 其中常数 $\eta\in(0,1)$, 函数 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 连续。

因为问题(1)所对应的线性齐次边值问题

$$\begin{cases} u''(t)=0, t\in[0,1], \\ u'(0)=0, u(1)=u(\eta) \end{cases}$$

有非平凡解 $u(t)\equiv c, c\in\mathbf{R}$。从而所讨论的问题是共振问题。

收稿日期: 2008-01-09

基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZS051-A25-016)

作者简介: 徐玲(1982-), 女, 硕士研究生, 研究方向为常微分方程边值问题. Email: xuling_216@yahoo.com.cn

1970 年，Landesman 和 Lazer[1] 首先开始研究半线性椭圆方程边值共振问题解的存在性。此后的三十多年，对于非线性常微分方程多点边值共振问题可解性的研究，受到了广泛关注，并获得了大量的重要结果[2-5]。这些工作大部分基于 Leray-Schauder 原理，Leray-Schauder 非线性抉择，迭合度理论及锥拉伸与锥压缩不动点定理等分析工作。

2003 年，文献[6]在满足共振条件 $\alpha\eta=1$ 的情形下，讨论了非线性常微分方程二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)=f(t,u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=0, & u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

解的存在性。相比较而言，问题(1)的一个显著特点是非线性项 f 显含了 u 的一阶导数，这无疑增加了问题的难度。本文试图在边值条件 $u'(0)=0, u(1)=u(\eta)$ 之下，运用紧向量场方程的解集连通理论为二阶三点边值共振问题(1)发展上下解方法，进而建立其解的存在性结果。

1 预备知识

本文的主要工具如下：

定理 A[7] 设 C 为 Banach 空间 E 的非空有界闭凸集，$T:[a,b]\times C\to C$ 是全连续映射。则集合

$$S=\{(\lambda,x)\mid T(\lambda,x)=x,\lambda\in[a,b]\}$$

包含一条连接 $\{a\}\times C$ 与 $\{b\}\times C$ 的连通分支 Σ。

定义 1 称 $x\in C^2[0,1]$ 是问题(1)的上解，如果

$$x''(t)\leqslant f(t,x(t),x'(t)),\ t\in[0,1], \tag{2}$$

$$x'(0)\leqslant 0,\quad x(1)-x(\eta)\geqslant 0。 \tag{3}$$

称 $y\in C^2[0,1]$ 是问题(1)的下解，如果

$$y''(t)\geqslant f(t,y(t),y'(t)),\ t\in[0,1], \tag{4}$$

$$y'(0)\geqslant 0,\ y(1)-y(\eta)\leqslant 0。 \tag{5}$$

定义 2 假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是问题(1) 的上下解且 $x(t)\geqslant y(t)$ 于$[0,1]$。我们称函数 f 在$[0,1]$上关于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足 Nagumo，如果存在一个函数 $\Phi\in C(\mathbf{R}^+,(0,+\infty))$，使得

$$|f(t,u,v)|\leqslant\Phi(|v|)$$

对所有的$(t,u,v)\in[0,1]\times[y(t),x(t)]\times\mathbf{R}$ 连续，且$\int_0^\infty\frac{s\mathrm{d}s}{\Phi(s)}=\infty$。

本文总假定：

(H_1) 假设函数 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 连续，且在$[0,1]$上关于上下解 x 和 y 满足 Nagumo 条件。

类似于文献[8]中的定理 1.4.1 的证明有：

引理 1 假设(H_1)成立。则方程

$$u''(t)=f(t,u(t),u'(t))$$

的任意满足 $y(t)\leqslant u(t)\leqslant x(t)$ 的解 u，对所有的 $t\in[0,1]$ 都有

$$|u'(t)|\leqslant L_1,$$

其中 $L_1>0$ 是依赖于 x 和 y 的常数。

本文中以 X 记赋范为 $\|u\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 的 Banach 空间 $C[0,1]$，以 Y 记赋范为 $\|y\|_Y=\max\{\|y\|_\infty,\|y'\|_\infty,\|y''\|_\infty\}$ 的 Banach 空间 $C^2[0,1]$。定义线性算子 $L:D(L)\subset Y\to X$，

$$Lu=u'',\ u\in D(L), \tag{6}$$

其中 $D(L)=\{u\in C^2[0,1]\mid u'(0)=0,\ u(1)=u(\eta)\}$。

引理 2 设 L 由(6)所定义。则 $\ker(L)=\{c\mid c\in\mathbf{R}\}$，

$$\mathrm{Im}(L)=\left\{y\in X\mid\int_\eta^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s+(1-\eta)\int_0^\eta y(s)\mathrm{d}s=0\right\}=$$

$$\left\{y\in X\mid\int_\eta^1 Y(\tau)\mathrm{d}\tau=0\right\},$$

其中 $Y(\tau)=\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s$。

证明　显然 $\ker(L)=\{c\mid c\in\mathbf{R}\}$。

若 $y\in\mathrm{Im}(L)$,则存在 $u\in D(L)$, 使得 $u''(t)=y(t)$。于是

$$Y(\tau)=\int_0^\tau u''(s)\mathrm{d}s=u'(\tau)-u'(0)=u'(\tau),$$

从而

$$\int_\eta^1 Y(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_\eta^1 u'(\tau)\mathrm{d}\tau=u(1)-u(\eta)=0。$$

另一方面,如果 $y\in X$ 满足$\int_\eta^1 Y(\tau)\mathrm{d}\tau=0$,则可令 $u(t)=\int_0^t\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$。不难验证:$u\in D(L)$ 且 $Lu=y$, $y\in\mathrm{Im}(L)$。

对 $y\in X$, 定义

$$Qy=\Gamma_0\int_\eta^1 Y(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{7}$$

其中 $\Gamma_0=\dfrac{2}{1-\eta^2}>0$。对 $y\in X$,设 $y_1(t)=y(t)-Qy$。则容易验证 $y_1\in\mathrm{Im}(L)$。

因此 $X=\mathrm{Im}(L)+R$, 又 $\mathrm{Im}(L)\cap\mathbf{R}=\{0\}$, 从而 $X=\mathrm{Im}(L)\oplus\mathbf{R}$。定义 $P:Y\to\ker(L)$ 为

$$(Pu)(t)=u(0),$$

则 $Y=\ker(P)\oplus\ker(L)$。记 $\tilde{Y}:=\ker(P)=\{u\in Y\mid u(0)=0\}$。对任一 $u\in Y$, 有惟一分解 $u(t)=\rho+w(t)$, 这里 $\rho\in\mathbf{R}$, $w\in\tilde{Y}$。令 $L_P:=L\mid_{D(L)\cap\tilde{Y}}$, 则 L_P 是从$D(L)\cap\tilde{Y}$ 到 $\mathrm{Im}(L)$ 的一一映射,记 $K_P=L_P^{-1}$。定义非线性算子 $N:X\to X$,

$$(Nu)(t)=f(t,u(t),u'(t)),\ t\in[0,1]。\tag{8}$$

对 $y\in\mathrm{Im}(L)$,

$$(K_py)(t)=\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s,$$

易证 $K_p(I-Q)N:X\to X$ 是全连续的,且问题(1) 等价于系统:

$$\begin{gathered}w(t)=K_p(I-Q)N(\rho+w(t)),\\ QN(\rho+w(t))=0。\end{gathered}\tag{9}$$

定义辅助函数 $f^*:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f^*(t,u,v)=\begin{cases}f(t,u,N_1), & v>N_1,\ t\in[0,1],\\ f(t,u,v), & |v|\leqslant N_1,\ t\in[0,1],\\ f(t,u,-N_1), & v<-N_1,\ t\in[0,1],\end{cases}\tag{10}$$

其中 $N_1=1+\max\{\|x'\|_\infty,\|y'\|_\infty,L_1\}$。

令 $M=1+\max\{|f(t,u,v)|:0\leqslant t\leqslant 1,y(t)\leqslant u\leqslant x(t),|v|\leqslant N_1\}>0$。当 $t\in[0,1]$ 时,定义辅助函数 $F:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$F(t,u,v)=\begin{cases}f^*(t,x(t),v)+[M-f^*(t,x(t),v)]\varphi(u(t)-x(t)), & u>x(t),\\ f^*(t,u,v), & y(t)\leqslant u\leqslant x(t),\\ f^*(t,y(t),v)+[-M-f^*(t,y(t),v)]\varphi(y(t)-u(t)), & u<y(t),\end{cases}\tag{11}$$

这里

$$\varphi(s)=\begin{cases}s, & 0\leqslant s\leqslant 1,\\ 1, & s>1。\end{cases}$$

显然, $\varphi:\mathbf{R}^+\to[0,1]$ 的连续函数。

由 F 的定义可知,当 $u(t)\geqslant\|x\|_\infty+1$ 时, $F=M>0$;当 $u(t)\leqslant\|y\|_\infty-1$ 时,$F=-M<0$。不妨设 $K:=\max\{\|x\|_\infty,\|y\|_\infty\}+1$。从而

$$F(t,\ u(t),\ u'(t))\cdot \operatorname{sgn} u = M > 0, \qquad |u| \geqslant K。$$

考虑如下问题

$$\begin{cases} u''(t) = F(t,u(t),u'(t)), & t \in [0,\ 1], \\ u'(0) = 0, & u(1) = u(\eta)。\end{cases} \tag{12}$$

定义非线性算子 $N^*: X \to X$

$$(N^* u)(t) = F(t,u(t),u'(t)), t \in [0,\ 1], \tag{13}$$

则 $K_P(I-Q)N^*: X \to X$ 的全连续的。

假设 x 和 y 分别为问题(1) 的上解与下解,并且 $x(t) \geqslant y(t)$ 于$[0,1]$。记集合

$$D = \{(t,u,u') \mid y(t) \leqslant u \leqslant x(t),\ |u'| \leqslant N_1,\ t \in [0,\ 1]\}。$$

引理 3 假设(H_1) 成立。如果 u 问题(12) 的解,则

$$y(t) \leqslant u(t) \leqslant x(t),\ |u'(t)| \leqslant N_1, t \in [0,\ 1]。 \tag{14}$$

即 u 是问题(1) 的解。

证明 首先证明

$$u(t) \leqslant x(t), t \in [0,\ 1]。$$

令 $z(t):= u(t) - x(t)$,反设对某 $t_0 \in [0,\ 1]$, $z(t_0) = \max\{u(t) - x(t) \mid t \in [0,1]\} > 0$。下面分三种情形证明。

情形 1 如果 $t_0 = 0$, 则 $z(0) > 0$, $z'(0) \leqslant 0$。另一方面,$z'(0) = u'(0) - x'(0) \geqslant 0$,即 $z'(0) = 0$, 则 $z''(0) \leqslant 0$。但是

$$\begin{aligned} z''(0) = u''(0) - x''(0) \geqslant F(0,\ u(0)\ u'(0)) - f(0,\ x(0),\ x'(0)) = \\ f^*(0,x(0),x'(0)) + [M - f^*(0,x(0),x'(0))]\varphi(u(0) - x(0)) - f(0,x(0),x'(0)) = \\ [M - f(0,\ x(0),\ x'(0)]\varphi(u(0) - x(0)) > 0。\end{aligned}$$

得出矛盾。

情形 2 如果 $t_0 \in (0,1)$, 则 $z(t_0) > 0$, $z'(t_0) = 0$, $z''(t_0) \leqslant 0$。但另一方面,

$$\begin{aligned} z''(t_0) = u''(t_0) - x''(t_0) \geqslant F(t_0,\ u(t_0)\ u'(t_0)) - f(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0)) = \\ f^*(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0)) + [M - f^*(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0))]\varphi(u(t_0) - \\ x(t_0)) - f(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0)) = \\ [M - f(t_0,\ x(t_0),\ u'(t_0)]\varphi(u(t_0) - x(t_0)) > 0。\end{aligned}$$

矛盾!

情形 3 如果 $t_0 = 1$, 则 $z(1) > 0$, $z'(1) \geqslant 0$。则边值条件可知 $z(1) \leqslant z(\eta)$。

若 $z(1) < z(\eta)$,这与 $z(1)$ 是最大值相矛盾;若 $z(1) = z(\eta)$,则 $z(\eta)(\eta \in (0,1))$ 也是最大值,但由第二步的证明可知,$z(\eta)$ 不可能为 $z(t)$ 的最大值,因此产生矛盾。

同理可证 $u(t) \geqslant y(t)$, $t \in [0,1]$。

由于对 $t \in [0,\ 1]$,有 $y(t) \leqslant u(t) \leqslant x(t)$, 故

$$F(t,\ u(t),\ u'(t)) = f^*(t,\ u(t),\ u'(t))。$$

另一方面,由引理 1 以及 N_1 的定义,有 $|u'(t)| < N_1$,则

$$F(t,u(t),u'(t)) = f^*(t,u(t),u'(t)) = f(t,u(t),u'(t))。$$

因此, u 是问题(1) 的解。

2 主要结果

定理 1 假设(H_1) 成立。如果 x 和 y 是问题(1) 的上下解,且在$[0,1]$ 上满足 $x(t) \geqslant y(t)$。则问题(1) 存在解 $u \in D$。

证明 由引理 3,只需证明

$$\begin{cases} u''(t) = F(t,u(t),u'(t)), & t \in [0,1], \\ u'(0) = 0, & u(1) = u(\eta)。\end{cases}$$

有解。易证 $K_P(I-Q)N^*:X\to X$ 是全连续的,而问题(12)等价于系统:

$$w(t)=K_p(I-Q)N^*(\rho+w(t)),\tag{15}$$

$$QN^*(\rho+w(t))=0。\tag{16}$$

因 F 有界,由式(15)和Schauder不动点定理可知:对任意 $\rho\in\mathbf{R}$,集合 $W(\rho):=\{w\in\tilde{Y}\mid(\rho,w)$ 满足式(15)$\}\neq\varnothing$。再由定理 A 可知:对任意 $a,b\in\mathbf{R},a<b$,集合

$$S:=\{(\rho,w)\in\mathbf{R}\times\tilde{Y}\mid(\rho,w)\text{ 满足式(15)}\}\tag{17}$$

包含一条连接 $\{a\}\times W(a)$ 与 $\{b\}\times W(b)$ 的连通分支 Σ。令

$$W:=\{w\in\tilde{Y}\mid(\rho,w)\in S\},$$

则由式(15)推知,存在不依赖于 ρ 的常数 $M_1>0$,使得

$$\max\{\|w\|_\infty,\ \|w'\|_\infty\}\leqslant M_1,w\in W。$$

因此可选取 $0<\rho_1\in\mathbf{R}$ 充分大,满足 $\rho_1\geqslant K>0$,使得对所有的 $w\in W(\rho_1)$,均有

$$\rho_1+w(t)>x(t),t\in[0,1]。$$

当 $u=\rho_1+w(t)\geqslant K$ 时,$F(t,u(t),u'(t))=M>0$,而且 $W(\rho_1)$ 变成单点集 $\{K_P(I-Q)M\}$。对每一 $w\in W(\rho_1)$,有:

$$QN^*(\rho_1+w(t))=\Gamma_0\int_\eta^1\int_0^\tau F(s,\rho_1+w(s),\ w'(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=M\Gamma_0\int_\eta^1\int_0^\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=M>0。$$

同理,可以选择 ρ_2,使得 $\rho_2\leqslant-K<0$,并且对每一 $w\in W(\rho_2)$,有

$$\rho_2+w(t)<y(t),\ t\in[0,\ 1]。$$

当 $u=\rho_2+w(t)\leqslant-K$ 时,$F(t,u(t),u'(t))=-M>0$。而且 $W(\rho_2)$ 变成单点集 $\{-K_P(I-Q)M\}$。对每一 $w\in W(\rho_2)$,有

$$QN^*(\rho_2+w(t))=\Gamma_0\int_\eta^1\int_0^\tau F(s,\rho_2+w(s),w'(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=-M\Gamma_0\int_\eta^1\int_0^\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=-M<0。$$

最后,由 Σ 的连通性:存在 $\rho_0\in(\rho_2,\rho_1)$ 及 $w(\rho_0)\in W(\rho_0)$。使得 $(\rho_0,\ w(\rho_0))\in\Sigma$,并且式(16)成立。因此 $\rho_0+w(\rho_0)$ 是问题(12)的一个解。

例　作为应用,考虑二阶三点边值共振问题

$$\begin{cases}u''(t)=(u'(t))^2+\dfrac{2\pi}{3}\sin(u(t))-\dfrac{\pi}{3}, & t\in[0,\ 1],\\ u'(0)=0, & u(1)=u(\eta),\end{cases}\tag{18}$$

其中 $f(t,\ u,\ v)=v^2+\dfrac{2\pi}{3}\sin u-\dfrac{\pi}{3}$。

容易验证 $x(t)=\dfrac{\pi}{2}$,$y(t)=-\dfrac{\pi}{2}$ 分别为问题(18)的上解和下解,且满足性质 $x(t)>y(t)$ 于$[0,1]$。

对任意的 $t\in[0,\ 1]$,$x(t)\leqslant u\leqslant y(t)$,$v\in\mathbf{R}$,$|f(t,u,v)|\leqslant|v|^2+\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=|v|^2+\pi$。

从而可选取 $\Phi(|v|)=|v|^2+\pi$,又因为

$$\int_0^\infty\frac{s\mathrm{d}s}{\Phi(s)}=\int_0^\infty\frac{s\mathrm{d}s}{s^2+\pi}=\frac{1}{2}\ln(s^2+\pi)\Big|_0^\infty=\infty,$$

因此 f 在$[0,1]$上关于 $x(t),y(t)$ 满足 Nagumo 条件。又由引理 1 及 N_1 的定义,有 $|u'(t)|<N_1$。应用定理 1 可得出:边值问题(18)有一个解 u 满足 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant u(t)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$|u'(t)|\leqslant N_1$ 于$[0,1]$。

参考文献:

[1] LANDESMAN E M, LAZER A C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problem at resonance[J]. J Math Mech, 1970, 19(7):609-623.

[2] GUPTA C P. Existence theorems for a second order m-point boundary value problem at resonance[J]. Internat J Math & Math Sci, 1995, 18(4):705-710.

(下转第 81 页)

(上接第70页)

[3] MA Ruyun. Existence theorem for a second order m-point boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1997, 211:545-555.
[4] FENG W, WEEB J R L. Solvability of a three-point boundary value problem at resonance[J]. Nonlinear Analysis, 1997, 30(6):3227-3238.
[5] HAN Xiaoling. Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl, 2007, 336:556-568.
[6] MA Ruyun. Multiplicity results for a three-point boundary value problem at resonance[J]. Nonlinear Analysis, 2003, 53:777-789.
[7] COSTA D G, GONCALVES J V A. Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problem at resonance [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 84:328-337.
[8] BERNFELD S R, LAKSHMIKANTHAM V. An introduction to nonlinear boundary value problem[M]. New York: Academic Press, 1974.
[9] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
[10] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

(编辑:陈丽萍)