第43卷 第6期 山 东 大 学 学 报（理 学 版） 2008年6月
Vol.43 No.6 Journal of Shandong University(Natural Science) Jun. 2008

文章编号:1671-9352(2008)06-0015-04

一种用4-圈和8-圈对二分图的划分

李峰[1],耿建艳[2],李硕[1],梁峰[1]

（1. 山东大学数学学院，山东 济南 250100；
2. 山东万杰医学院数学教研室，山东 淄博 255213）

摘要:证明了如果一个平衡二分图 G 包含 $4k$ 个点, $k\geqslant 2$, 并且对 G 中每一对满足 $x\in V_1$, $y\in V_2$ 的不相邻顶点 x 和 y 成立 $d(x)+d(y)\geqslant 2k+1$, 则 G 包含 $k-2$ 个4-圈和一个8-圈,并且这 $k-1$ 个圈点不相交。

关键词:4-圈；8-圈；二分图；划分

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A

A partition of bipartite graphs with 4-cycle and 8-cycle

LI Feng[1], GENG Jian-yan[2], LI Shuo[1], LIANG Feng[1]

(1. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. Department of Mathematics, Wanjie Medical College of Shandong, Zibo 255213, Shandong, China)

Abstract: It was proved that if G is a balanced bipartite graph of order $4k$ satisfying $d(x)+d(y)\geqslant 2k+1$ for any two non-adjacent vertices $x\in V_1$, $y\in V_2$, then G contains $k-2$ 4-cycles and one 8-cycle such that all the $k-1$ cycles are vertex-disjoint.

Key words: 4-cycle; 8-cycle; bipartite graph; partition

0 引言

本文中只讨论简单二分图。设 $G=(V_1,V_2;E)$是一个二分图，$V(G)$, $|G|$, $E(G)$和 $e(G)$分别表示 G 的顶点集，顶点数,边集和边数。$\delta(G)$表示图 G 的最小度，$d(x)$表示 x 在 G 中的度，而 $d(x,C)$表示 x 与子图 C 之间的边数。若 X, Y 是 G 的子图,则 $e(X,Y)$表示 X 和 Y 之间的边数。若 P 是一条路,则 $l(P)$表示 P 的长度。4-圈是指顶点数为4的圈,8-圈是指长度为8的圈,4-路表示顶点数为4的路，而 C^4, C^8 和 P^4 分别是4-圈,8-圈及4-路的符号表示。$\sigma_{1,1}(G)$表示对 G 中任意 $x\in V_1$, $y\in V_2$, $xy\notin E(G)$, $d(x)+d(y)$的最小值。另外对于任意 $x\in V_1$, $y\in V_2$,若 $xy\notin E(G)$,称$\{x,y\}$是一个“不相邻对”。而如果 G 的两个分部满足 $|V_1|=|V_2|$,则称 G 为平衡二分图。文中其他未见说明的符号请参见文献[1]。

在图论研究中,2-因子问题是比较热门的问题。而关于平衡二分图的2-因子问题则更是一个有趣的课题。关于这个问题已经有了很多结果。1963年 Moon 和 Moser 在[2]中给出平衡二分图包含一个汉密尔顿圈的度条件。

定理1[2] 设 G 是一个平衡二分图,顶点数为 $2n$。如果 $\delta(G)\geqslant(n+1)/2$, 则 G 包含一个汉密尔顿圈。

1986年,Amar 在[3]中则给出平衡二分图能用任意长度的两个偶圈划分的度条件。

收稿日期:2008-01-16
基金项目:山东省中青年科学家科研奖励基金资助项目(2007BS01021)
作者简介:李峰(1984-),男,硕士研究生,主要研究2-因子问题.Email:lifeng250100@mail.sdu.edu.cn

定理 2[3] 设 G 是包含 $2n$ 个顶点的平衡二分图，并且对任意 $u\in V_1, v\in V_2$ 有 $d(u)+d(v)\geqslant n+2$。则对满足 $n_1+n_2=n$ 的任意整数 n_1, n_2，G 包含两个点不相交的圈，其长度分别为 $2n_1, 2n_2$。

1998 年，Wang 在[4]中给出了平衡二分图包含 k 个圈组成的 2-因子的度条件。

定理 3[4] 设 $G=(V_1, V_2; E)$ 是一个平衡二分图，k 是一个正整数。如果 $|V_1|=|V_2|=n\geqslant 2k+1$，$\delta(G)\geqslant\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$，则 G 包含恰好由 k 个点不相交的圈组成的二因子。

而文章[5]则将定理 3 中的度条件进一步改进为 $\delta(G)\geqslant(n+1)/2$。

定理 4[5] 设 k 是一个正整数，G 是一个包含 $2n$ 个点的平衡二分图，并且 $n\geqslant\max\{52, 2k^2+1\}$。如果 $\delta(G)\geqslant(n+1)/2$，则 G 包含恰好由 k 个圈组成的 2-因子。

关于平衡二分图的 2-因子中包含 4-圈的情况，Wang 在[6]中给出下列结果：

定理 5[6] 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=2k+t$，k 与 t 都是正整数，并且 $t\geqslant 3$。如果 $\delta(G)\geqslant\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$，则 G 包含由点不相交的 $k+1$ 个圈组成的 2-因子，并且其中 k 个是 4-圈。

现在考虑一个平衡二分图的特例：$|V_1|=|V_2|=2k$。关于该特例的 2-因子问题，Wang 在[7]中首先给出如下猜想：

猜想[7] 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=2k$。如果 $\delta(G)\geqslant k+1$，则 G 包含 k 个点不相交的 4-圈。

而根据定理 3，可以确定此类平衡二分图特例一定包含由 $k-1$ 个圈组成的 2-因子。

结论 1 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=2k$。如果 $\delta(G)\geqslant k+1$，则 G 可以划分为 $k-2$ 个 4-圈和一个 8-圈，或 $k-3$ 个 4-圈和两个 6-圈，并且不论哪种划分，$k-1$ 个圈都是点不相交的。

又根据定理 5，可确定结论 1 中的第一种划分一定成立。

结论 2 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=2k$。如果 $\delta(G)\geqslant k+1$，则 G 可以划分为 $k-2$ 个 4-圈和一个 8-圈，并且这 $k-1$ 个圈是点不相交的。

本文的目的是要将结论 2 中的度条件 $\delta(G)\geqslant k+1$ 改为 $\sigma_{1,1}(G)\geqslant 2k+1$ 而结论仍然成立。

定理 A 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=2k$，$k\geqslant 2$。如果 $\sigma_{1,1}(G)\geqslant 2k+1$，则 G 可以划分为 $k-2$ 个 4-圈和一个 8-圈，并且这 $k-1$ 个圈点不相交。

用下面这个例子，可说明定理 A 中的度条件是最好的：设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，$|V_1|=|V_2|=2k$。设 $x\in V_1$，取 $G-\{x\}$ 为一个完全二分图，而让 x 仅与 V_2 中的某一点 y 相邻。则此时 $\sigma_{1,1}(G)=n=2k$，但因为没有任何圈可以过点 x，所以 G 不含 2-因子。

1 预备知识

引理 1[4] 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个二分图，而 C 是 G 中的一个圈，P 是一条路，它的两个端点分别为 $u\in V_1, v\in V_2$，并且 C 与 P 是点不相交的。设 $l(C)=2q$，如果 $d(u, C)+d(v, C)\geqslant q+1$，则 G 包含圈 C' 满足 $V(C')=V(C\cup P)$。

引理 2[8] 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=2k$，$k\geqslant 2$。如果 $\sigma_{1,1}(G)\geqslant 2k+1$，则 G 包含 $k-1$ 个相互独立的 4-圈和一条 4-路，并且路和圈也是相互独立的。

引理 3 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个平衡二分图，C_1, C_2 是两个点不相交的 4-圈。若 $e(C_1, C_2)\geqslant 5$，则 $G[V(C_1\cup C_2)]\supseteq C^8$。

证明 设 $C_1=\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_1\}$。则由 $e(C_1, C_2)=e(x_1y_1, C_2)+e(x_2y_2, C_2)\geqslant 5$，不失一般性，可设 $e(x_1y_1, C_2)\geqslant 3$，根据引理 1 得则 $G[V(C_1\cup C_2)]\supseteq C^8$。

2 定理 A 证明

由引理 2，可得 $G\supseteq(k-1)C^4\cup P^4$。设此 $k-1$ 个 4-圈为 $C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}$，并设 $H=\bigcup_{i=1}^{k-1}C_i$。假设定理 A

不成立。首先证明几个断言。

断言 1　$G \supseteq kC^4$。

设 $P^4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$。如果断言不成立,则 $p_1 p_4 \notin E(G)$。于是有下式:

$$d(p_1, H) + d(p_4, H) \geqslant 2k + 1 - 2 = 2k - 1 = 2(k-1) + 1,$$

则存在一个 $C_i \in H$ 满足:

$$d(p_1, C_i) + d(p_4, C_i) \geqslant 3,$$

由引理 1 得 $G[V(P \cup C_i)] \supseteq C^8$,因此 $G \supseteq (k-2)C^4 \cup C^8$,即定理 A 成立,与假设矛盾,所以断言成立。

现在设 $H = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$。由引理 3,对任意 $C_i, C_j \in H$,都有 $e(C_i, C_j) \leqslant 4$。

下面将每个 4-圈看作一个点,然后构造一个有向图 D。D 中 C_i 与 C_j 之间有向弧的存在和方向规定如下:

1) $C_iC_j \in A(D)$当且仅当 $e(C_i \cap V_1, C_j) \geqslant 3$;

2) $C_jC_i \in A(D)$当且仅当 $e(C_i \cap V_2, C_j) \geqslant 3$。

断言 2　当 $C_iC_j \in A(D)$时,$e(C_i \cap V_2, C_j) = 0$ 即 $C_j C_i \notin A(D)$,反之亦然。

设在 G 中 $C_i = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_1\}$,$x_1, x_2 \in V_1$。假设断言不成立,则存在 $C_i, C_j \in H$ 满足当$C_iC_j \in A(D)$时,有 $e(C_i \cap V_2, C_j) = e(\{y_1, y_2\}, C_j) \geqslant 1$。由 D 中有向弧的规定得 $e(\{x_1, x_2\}, C_j) \geqslant 3$。显然有 $G[V(C_i \cup C_j)] \supseteq C^8$即 $G \supseteq (k-2)C^4 \cup C^8$,定理 A 成立,矛盾。

断言 3　D 中不存在有向圈。

假设断言不成立,则存在一个有向圈, 设该圈的长为 m, 又由断言 2 得 $m \geqslant 3$。设该有向圈的 m 个点对应于 G 中的m 个 4-圈分别为$C_1 = \{x_{1,1}, y_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, x_{1,1}\}$, $C_2 = \{x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}, x_{2,1}\}$, $C_3 = \{x_{3,1}, y_{3,1}, x_{3,2}, y_{3,2}, x_{3,1}\}$, $\cdots$, $C_m = \{x_{m,1}, y_{m,1}, x_{m,2}, y_{m,2}, x_{m,1}\}$,其中 $x_{i,j} \in V_1$, $y_{i,j} \in V_2$, $i = 1,2,3,\cdots,m$, $j = 1,2$。并且不失一般性设:$x_{i,1} y_{i+1,1}, x_{i,1} y_{i+1,2}, x_{i,2} y_{i+1,2} \in E(G)$, $i = 1,2,3,\cdots,m$,($i+1$ 以 m 为模)。则可取$\{x_{1,1}, y_{1,1}, x_{1,2}, y_{2,2}, x_{2,2}, y_{3,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{1,1}\}$作为 8-圈,$\{x_{3,1}, y_{3,1}, x_{3,2}, y_{4,2}, x_{3,1}\}$, $\cdots$, $\{x_{m,1}, y_{m,1}, x_{m,2}, y_{1,2}, x_{m,1}\}$, C_{m+1}, $\cdots$, C_k 作为$k-2$ 个 4-圈,定理 A 成立。(详情见图 1)

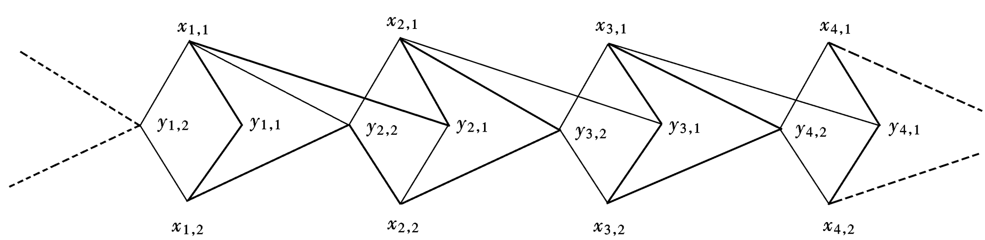

图 1

断言 4　D 中至少有一条有向弧存在。

假设断言不成立,则任取 H 中的两个 4-圈,设为 C_1, C_2。设 $C_1 = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_1\}$, $C_2 = \{x_3, y_3, x_4, y_4, x_3\}$。设 $e(\{x_1, x_2\}, C_2) \geqslant e(\{y_1, y_2\}, C_2)$。当 $e(\{x_1, x_2\}, C_2) > 0$ 时,$e(\{y_1, y_2\}, C_2) = 0$, 否则 $G[V(C_1 \cup C_2)] \supseteq C^8$,矛盾。所以 $e(\{y_1, y_2\}, C_2) = e(\{y_1, y_2\}, \{x_3, x_4\}) = 0$ 恒成立, 于是有下式:

$$d(\{y_1, y_2, x_3, x_4\}, H \setminus (C_1 \cup C_2)) \geqslant 4k + 2 - 8 = 4(k-2) + 2,$$

上式说明存在 $C_i \in H$ 满足:$d(\{y_1, y_2, x_3, x_4\}, C_i) \geqslant 5$,即有 $d(\{y_1, y_2\}, C_i) \geqslant 3$ 或 $d(\{x_3, x_4\}, C_i) \geqslant 3$。但根据 D 中有向弧的规定,不论哪种情况,都会产生有向弧,矛盾。

现在取 D 中最长的一条有向路P,设为 $C_1 C_2 \cdots C_m$,则 $m \geqslant 2$,并且由 P 最长以及断言 3 得$d^-(C_1) = d^+(C_m) = 0$。设 m 个点对应于G 中的m 个圈分别是$C_1 = \{x_{1,1}, y_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, x_{1,1}\}$, $C_2 = \{x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}, x_{2,1}\}$, $C_3 = \{x_{3,1}, y_{3,1}, x_{3,2}, y_{3,2}, x_{3,1}\}$, $\cdots$, $C_m = \{x_{m,1}, y_{m,1}, x_{m,2}, y_{m,2}, x_{m,1}\}$。

断言 5　$\{y_{1,1}, y_{1,2}, x_{m,1}, x_{m,2}\}$不能划分成两个“不相邻对”。

假设断言不成立,即$\{y_{1,1},y_{1,2},x_{m,1},x_{m,2}\}$能划分成两个不相邻对,则

$$d(\{y_{1,1},y_{1,2},x_{m,1},x_{m,2}\},H)\geqslant 4k+2。$$

又由断言 2 及 $d^-(C_1)=d^+(C_m)=0$ 得

$$d(\{y_{1,1},y_{1,2},x_{m,1},x_{m,2}\},\bigcup_{i=1}^{m}C_i)\geqslant 4+2(m-2)+4+2(m-2)=4m。$$

所以有：$$d(\{y_{1,1},y_{1,2},x_{m,1},x_{m,2}\},H\setminus\bigcup_{i=1}^{m}C_i)\geqslant 4k+2-4m=4(k-m)+2。$$

若 $k=m$,则由于$\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ 是 G 的支撑子图,得 $d(\{y_{1,1},y_{1,2},x_{m,1},x_{m,2}\},\varnothing)=2$,显然不成立。所以 $k>m$,于是存在 $C_i\in H$ 满足:$d(\{y_{1,1},y_{1,2},x_{m,1},x_{m,2}\},C_i)\geqslant 5$,即 $d(\{y_{1,1},y_{1,2}\},C_i)\geqslant 3$ 或 $d(\{x_{m,1},x_{m,2}\},C_i)\geqslant 3$。又根据有向弧规定,$d^-(C_1)>0$ 或 $d^+(C_m)>0$,矛盾,所以断言成立。

由断言 5 及 $e(\{y_{1,1},y_{1,2}\},\{x_{m,1},x_{m,2}\})\leqslant 2$,得 $e(\{y_{1,1},y_{1,2}\},\{x_{m,1},x_{m,2}\})=2$,并且只能是以下两种情况之一:

1） $x_{m,1},x_{m,2}$同时与$\{y_{1,1},y_{1,2}\}$中的一点相邻;

2） $y_{1,1},y_{1,2}$同时与$\{x_{m,1},x_{m,2}\}$中的一点相邻。

无论哪种情况都由断言 2 得 $m\geqslant 3$。当 1)成立时,不失一般性,设 $e(\{x_{m,1},x_{m,2}\},y_{1,2})=2$,则与断言 3 的做法相同,可取$\{x_{1,1},y_{1,1},x_{1,2},y_{2,2},x_{2,2},y_{3,2},x_{2,1},y_{2,1},x_{1,1}\}$作为 8-圈,$\{x_{3,1},y_{3,1},x_{3,2},y_{4,2},x_{3,1}\}\cdots\{x_{m,1},y_{m,1},x_{m,2},y_{1,2},x_{m,1}\}$,$C_{m+1}\cdots C_k$ 作为 $k-2$ 个 4-圈,定理成立,矛盾。当 2)成立时,不失一般性,可设 $e(\{y_{1,1},y_{1,2}\},x_{m1})=2$,并且为了便于问题描述,设 $x_{i,1}y_{i+1,1},x_{i,1}y_{i+1,2},x_{i,2}y_{i+1,1}\in E(G)$,$i=1,2,3,\cdots,m-1$。则取$\{y_{m,1},x_{m,2},y_{m,2},x_{m-1,1},y_{m-1,2},x_{m-2,1},y_{m-1,1},x_{m-1,2},y_{m,1}\}$作为 8-圈,而取$\{y_{m-2,1},x_{m-2,2},y_{m-2,2},x_{m-3,1},y_{m-2,1}\}\cdots\{y_{1,1},x_{1,2},y_{1,2},x_{m,1},y_{1,1}\}$,$C_{m+1}\cdots C_k$ 作为$k-2$ 个 4-圈,定理 A 仍然成立(详情见图 2)。

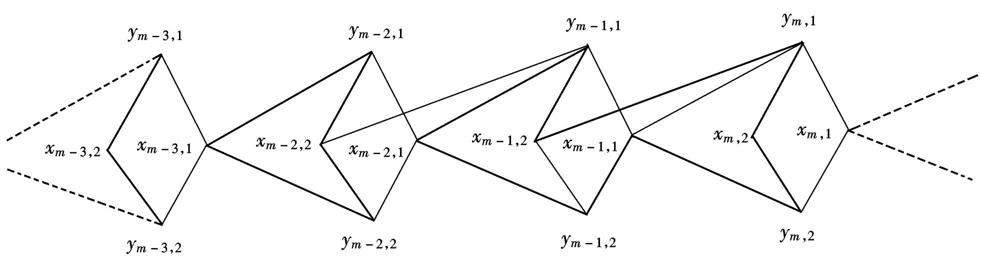

图 2

3　问题

对于平衡二分图 G,当$|V_1|=|V_2|=2k$ 时,若它包含由 $k-1$ 个圈组成的 2-因子,则只可能有两种情况,即 $G\supseteq(k-2)C^4\cup C^8$ 或 $G\supseteq(k-3)C^4\cup 2C^6$。本文证明了第一种划分一定存在,我们猜想第二种划分也存在。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.

[2] MOON J, MOSER L. On Hamiltonian bipartite graphs[J]. Israel J Math, 1963(1):163-165.

[3] AMAR D. Partition of a bipartite Hamiltonian graph into two cycles[J]. Discrete Math, 1986, 58:1-10.

[4] WANG H. On 2-factors of bipartite graph[J]. J Graph Theory, 1999, 31:101-106.

[5] CHEN G, FAUDREE R J, GOULD R J, et al. Cycles in 2-factors of balanced bipartite graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 2000, 16:67-80.

[6] WANG H. On quadrilaterals and cycle covers in a bipartite graph[J]. Ars Combin, 2001, 58:301-312.

[7] WANG H. On the maximinum number of independent cycles in a bipartite graph[J]. J Combin Theory B, 1996, 67:152-164.

[8] 颜谨,刘桂真. 图中相互独立的4-圈和含4个点的路[J]. 数学物理学报, 2003, 23(6):711-718.

（编辑:李晓红）