文章编号:1671-9352(2008)04-0076-05

广义模糊值 Choquet 积分的强序连续与伪 S 性

李艳红[1],王贵君[2]

(1. 辽东学院师范学院数学系,辽宁 丹东 118000;
2. 天津师范大学数学科学学院,天津 300387)

摘要:在一般模糊测度空间上,针对给出的广义模糊值 Choquet 积分,将这种积分整体看成可测空间上取值于模糊数的集函数,进而研究了当模糊测度满足强序连续、伪 S 性时,这种模糊值 Choquet 积分所保持的遗传性质。

关键词:模糊测度;广义模糊值 Choquet 积分;μ-可积;强序连续;伪 S 性

中图分类号:O159　　**文献标志码**:A

Strongly order continuity and pseudo-S-property of generalized fuzzy valued Choquet integrals

LI Yan-hong[1], WANG Gui-jun[2]

(1. Department of Mathematics, Teacher's College of Easten Liaoning University, Dandong 118000, Liaoning, China;
2. School of Mathematics Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: In general fuzzy measure spaces, aimed at giving generalized fuzzy valued Choquet integrals, these kind of integrals were completely regarded as a set function taken fuzzy numbers in measurable spaces. Then, when the fuzzy measure satisfied the strongly order continuity and pseudo-S-property, the heredity of the fuzzy valued Choquet integrals was researched.

Key words: fuzzy measures; generalized fuzzy valued Choquet integrals; μ-integrable; strongly order continuity; pseudo-S-property

0 引言

1984年,我国学者王震源[1]首次提出集函数的"自连续"和"零可加"等重要概念,继而于1985年在文献[2]中提出"伪自连续"、"伪零可加"和"伪S性"等一系列概念,这些特性对于刻画和描述可测函数列及模糊积分序列收敛都具有很强的针对性。90年代初,张广全[3]在一般可测模糊集空间上,首次引入了一些有关模糊数值模糊测度的自连续方面的概念,并获得一系列类似于文献[1,2]的结果。1996年,王震源[4]在一般模糊测度空间上,借助于经典 Lebesgue 积分和 Choquet 型积分,重新定义了所谓的 Choquet 型单调集函数,并系统地研究了当模糊测度满足零可加、自连续、逆(一致)自连续、伪(一致)自连续性时,这种集函数所具有的一些遗传性质和结构特征。文献[5]针对一类 μ-可积模糊数值函数,建立了所谓模糊数值 Choquet 积分。事实上,这种模糊积分是将被积函数作为研究对象来讨论它的收敛性。文献[6-8]在此基础上重新建立了所谓的广义模糊值 Choquet 积分,这样,其积分就构成一个取值于模糊值的集函数,进而讨论当模糊测度满足(伪)零可加、(伪)自连续等性质时,对应的模糊值集函数所具有的一些遗传性。本文是继续讨论当模糊测

收稿日期:2008-03-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(70571056)
作者简介:李艳红(1965-),女,硕士,副教授,主要从事模糊积分理论的研究. Email:ddlyh9165@126.com
王贵君(1962-),男,教授,主要从事模糊测度与模糊积分,模糊群等理论的研究.

度满足强序连续和伪S性时，这种广义模糊值Choquet积分所具有的遗传性质。

1 预备知识

设 X 是一经典集合，$\mathbf{R}_+=[0,+\infty)$，$\mathfrak{R}$ 是 X 上若干子集构成的 σ-代数，$(X,\mathfrak{R})$ 代表任一给定的可测空间，$\mathbf{R}_+$ 上的区间数定义为：$I_{\mathbf{R}_+}=\{\bar{a}=[a^-,a^+]\mid a^-\leqslant a^+,\ a^-,\ a^+\in\mathbf{R}_+\}$。

本文用 $F(\mathbf{R}_+)$ 表示 $\mathbf{R}_+$ 上全体模糊数构成的集合，其中，对任意实数 $a\in\mathbf{R}_+$，按文献[6]的规定，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，必有 $a_\lambda=\{a\}=[a,a]$，因此，实数 a 可看成特殊的模糊数，特别当 $a=0$ 时，零模糊数 $\tilde{0}$ 表为 $\tilde{0}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\ 0_\lambda=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\{0\}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[0,0]\in F(\mathbf{R}_+)$。

定义 1.1 设区间数序列 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_n\}\subset\boldsymbol{I}_{\mathbf{R}_+}$，$\bar{a}\in I_{\mathbf{R}_+}$，若 $a_n^-\to a^-$ 且 $a_n^+\to a^+\ (n\to\infty)$。则称 $\{\bar{a}_n\}$ 收敛于 $\bar{a}$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n=\bar{a}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n^-,\ a_n^+]=[\lim\limits_{n\to\infty}a_n^-,\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n^+]$。

定义 1.2[4] 设模糊数 $\tilde{A},\tilde{B}\in F(\mathbf{R}_+)$，规定：(1) $\tilde{A}=\tilde{B}\Leftrightarrow\forall\lambda\in(0,1],A_\lambda^-=B_\lambda^-$ 且 $A_\lambda^+=B_\lambda^+$；(2) $\tilde{A}\leqslant\tilde{B}\Leftrightarrow\forall\lambda\in(0,1]$，$A_\lambda^-\leqslant B_\lambda^-$ 且 $A_\lambda^+\leqslant B_\lambda^+$；(3) $\tilde{A}<\tilde{B}\Leftrightarrow\tilde{A}\leqslant\tilde{B}$ 且 $\tilde{A}\neq\tilde{B}$。

定义 1.3[4] 设模糊数值序列 $\{\tilde{A}_n\}\subset F(\mathbf{R}_+)$，$\tilde{A}\in F(\mathbf{R}_+)$，若 $\forall\lambda\in(0,1]$，有 $(A_n)_\lambda^-\to A_\lambda^-$ 且 $(A_n)_\lambda^+\to A_\lambda^+\ (n\to\infty)$，则称 $\{\tilde{A}_n\}$ 收敛于 $\tilde{A}$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{A}_n=\tilde{A}$。

定义 1.4[1] 设 $(X,\mathfrak{R})$ 是可测空间，集函数 $\mu:\mathfrak{R}\to[0,+\infty]$，若满足下列诸条件：

(1) $\mu(\phi)=0$；

(2) 若 $A,B\in\mathfrak{R}$ 且 $A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leqslant\mu(B)$；(单调性)

(3) 若 $A_n\uparrow A$，$A_n\in\mathfrak{R}\Rightarrow\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$；(下连续)；

(4) 若 $A_n\downarrow A$，$A_n\in\mathfrak{R}$ 且 $\exists\,n_0$ 使 $\mu(A_{n_0})<+\infty\Rightarrow\mu(A_n)\downarrow\mu(A)$(上连续)。

则 μ 称为模糊测度，相应的 (X,R,μ) 称为模糊测度空间。

定义 1.5[9] 设 $(X,\mathfrak{R})$ 是可测空间，集函数 $\mu:\mathfrak{R}\to[0,+\infty]$，若 $\forall E,F\in\mathfrak{R}$，$E\cup F\in\mathfrak{R}$，且 $\mu(F)=0\Rightarrow\mu(E\cup F)=\mu(E)$，则称 μ 是零可加的，简记为0-add。

定义 1.6[9] 设 $(X,\mathfrak{R})$ 是一可测空间，集函数 $\mu:\mathfrak{R}\to[0,+\infty]$，若 $\forall\{E_n\}\subset\mathfrak{R}$，$E\in R$，满足 $E_n\downarrow E$ 且 $\mu(E)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$，则称 μ 在零集连续或称 μ 是强序连续的。

定义 1.7[9] 设 $(X,\mathfrak{R})$ 是一可测空间，集函数 $\mu:\mathfrak{R}\to[0,+\infty]$，若 $\forall\{E_n\}\subset\mathfrak{R}$，并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=0\Rightarrow$ 存在 $\{E_n\}$ 的子集列 $\{E_{n_i}\}$ 使得 $\forall A\in\mathfrak{R}$，有 $\mu\left(A-\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}E_{n_i}\right)=\mu(A)$，则称集函数 μ 具有伪S性。

定义 1.8[5] 设 $\tilde{f}$ 为模糊测度空间 $(X,\mathfrak{R},\mu)$ 上可测模糊值函数，若 $\forall\lambda\in(0,1]$，其Choquet型Lebesgue积分 $\int_0^{+\infty}\mu((f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t$ 均存在且其值有限，则称 $\tilde{f}$ 为 $(X,\mathfrak{R},\mu)$ 上关于 μ 是Lebesgue可积的，简称 $\tilde{f}$ 为 μ-可积的。

定义 1.9[5] 设 $\tilde{f}$ 为模糊测度空间 $(X,\mathfrak{R},\mu)$ 上的 μ-可积模糊值函数，$\forall A\in\mathfrak{R}$，令

$(C)\int_A\tilde{f}\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\int_0^{+\infty}\mu\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t\Big)\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty}\mu\Big(A\cap(f_\lambda^+)_t\Big)\mathrm{d}t\right]$，则称 $\int_A\tilde{f}\mathrm{d}\mu$ 为 $\tilde{f}$ 在 A 上关于 μ 的模糊值Choquet积分，其中，上式右端出现的积分均为Lebesgue意义下的积分，并且 $(C)\int_A\tilde{f}\mathrm{d}\mu\in F(\mathbf{R}_+)$。关于这种积分定义的合理性与基本性质，可参看文献[5]。

2 主要结果

本文将采用文献[6-7]类似的方法，继续研究由模糊值Choquet积分定义的模糊值集函数 $\tilde{\nu}$ 满足强序连

续和伪 S 性时, 这种广义模糊值 Choquet 积分所具有的遗传性质。

定理 2.1　设$(X,\mathfrak{R},\mu)$是模糊测度空间, $\tilde{f}$是给定的μ- 可积模糊值函数, 若模糊测度 μ 是强序连续的,且具有零可加性, 并满足 $\mu(\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)=0\})=\mu(\{x\in X\mid f_\lambda^+(x)=0\})=0$, $\forall\lambda\in(0,1]$。令 $\tilde{\nu}(A)=(C)\int_A \tilde{f}\mathrm{d}\mu$, $\forall A\in\mathfrak{R}$, 则模糊值集函数 $\tilde{\nu}$ 也是强序连续的。

证明　设 $\forall\{A_n\}\subset\mathfrak{R}, A\in\mathfrak{R}, A_n\downarrow A(n\to\infty)$,且满足 $\tilde{\nu}(A)=\tilde{0}$。

由模糊集分解定理及定义 1.9 知,

$$\tilde{\nu}(A)=\tilde{0}\Leftrightarrow\forall\lambda\in(0,1],\begin{cases}\int_0^{+\infty}\mu(A\cap(f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t=0,\\ \int_0^{+\infty}\mu(A\cap(f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t=0。\end{cases}\tag{1}$$

因模糊值函数 $\tilde{f}$ 是μ- 可积的, 故 $\forall\lambda\in(0,1]$ 及 $n=1,2,\cdots$, 必有

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mu((f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mu((f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t<+\infty,\\ \int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mu((f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t<+\infty。\end{cases}\tag{2}$$

因此, 本文所涉及的积分式中的被积函数在 Lebesgue 意义下都是可积的,并且其积分值有限。

现不妨设式(1) 成立, 则对任意固定的 $\lambda\in(0,1]$, 必可推出被积函数

$$\varphi(t)=\mu(A\cap(f_\lambda^-)_t)\equiv 0,\forall t\in(0,+\infty)。\tag{3}$$

现反证: 事实上,若 $\varphi(t)$ 不恒为零, 则 $\forall\lambda\in(0,1]$, $\exists$ $t_0\in(0,+\infty)$ 使 $\mu\big((A\cap(f_\lambda^-)_{t_0}\big)>0$。并且,显然非负可测函数 $\varphi(t)$ 关于变量 t 是单调递减的。这时,

$$0=\int_0^{+\infty}\mu(A\cap(f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{t_0}\mu(A\cap(f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{t_0}\mu\big(A\cap(f_\lambda^-)_{t_0}\big)\mathrm{d}t=$$

$$t_0\cdot\mu\big(A\cap(f_\lambda^-)_{t_0}\big)>0。$$

这产生矛盾! 因此, 必有式(3) 成立。同理方法, 也可证得下式成立,

$$\mu(A\cap(f_\lambda^+)_t)\equiv 0,\forall t\in(0,+\infty)。$$

另一方面, 令 $B_n=A\cap\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)\geqslant 1/n\}$, $n=1,2,\cdots$,显然, 集合列$\{B_n\}$ 关于自然数 n 是单调递增的,并且对 $\forall\lambda\in(0,1]$, 显有

$$\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)\geqslant 1/n\}。$$

对式(3),若令 $t=1/n$, $n=1,2,\cdots$,则必有

$$\mu(B_n)=\mu\big(A\cap\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)\geqslant 1/n\}\big)=0,n=1,2,\cdots,$$

从而,再由模糊测度 μ 的下半连续性,获得

$$\mu(A\cap\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)>0\})=\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(A\cap\Big\{x\in X\Big|f_\lambda^-(x)\geqslant 1/n\Big\}\Big)=$$

$$\mu\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(A\cap\Big\{x\in X\Big|f_\lambda^-(x)\geqslant 1/n\Big\}\Big)=\mu(\lim_{n\to\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=0。$$

由题设 $\mu(\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)=0\})=0$ 及 μ 的零可加性, 容易得到

$$\mu(A)=\mu\Big(\Big(A\cap\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)>0\}\cup\Big(A\cap\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)=0\}\Big)=$$

$$\mu\Big(\Big(A\cap\{x\in X\mid f_\lambda^-(x)>0\}\Big|\Big)=0。$$

因模糊测度 μ 具有强序连续性, 因此, 立即可得 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$。

又 $\forall\lambda\in(0,1]$, $\forall t\in(0,+\infty)$, 显有

$$\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t)\leqslant\mu(A_n),\quad\mu(A_n\cap(f_\lambda^+)_t)\leqslant\mu(A_n),\quad n=1,2,\cdots,$$

令 $n\to\infty$,故有 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^+)_t)=0$。

这时，再由定义 1.3、定义 1.9 及 Lebesgue 积分控制收敛定理，获得

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\nu}(A_n)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\Big[\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t)\,\mathrm{d}t,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mu\Big(A_n\cap(f_\lambda^+)_t\Big)\,\mathrm{d}t\Big]=$$
$$\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\Big[\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\mu\Big(A_n\cap(f_\lambda^-)_t\Big)\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\mu\Big(A_n\cap(f_\lambda^+)_t\Big)\,\mathrm{d}t\Big]=$$
$$\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[0,\ 0]=\tilde{0}。$$

因此，由定义 1.6 知，模糊值集函数 $\tilde{\nu}$ 也是强序连续的。

下面，为了讨论问题方便，首先给出以下引理。

引理 1[3] 设 $g_n:[0,+\infty)\to[0,+\infty)(n=1,2,\cdots)$ 是一串 Lebesgue 可积函数序列，并满足 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}g_n(x)\mathrm{d}x=0$，且对任意固定自然数 n 来说，函数 $g_n(x)$ 关于变量 x 是单调递减的，则对一切 $x\in[0,+\infty)$，都有 $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0$。

定理 2.2 设$(X,\Re,\mu)$是模糊测度空间，$\tilde{f}$ 是给定的μ- 可积模糊值函数，若模糊测度 μ 具有伪 S 性，$\forall A\in\Re$，令 $\tilde{\nu}(A)=(C)\int_A\tilde{f}\mathrm{d}\mu$，则模糊值集函数 $\tilde{\nu}$ 也具有伪 S 性。

证明 设$\{A_n\}\subset\Re$ 且满足$\lim_{n\to\infty}\tilde{\nu}(A_n)=\tilde{0}$。因 $\tilde{f}$ 是 μ- 可积的，故 $\forall\lambda\in(0,1]$，必有

$$\int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mu((f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t<+\infty。$$

再由定义 1.3 和 1.9 知，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，更有以下两式成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t)\mathrm{d}t=0;\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mu(A_n\cap(f_\lambda^+)_t)\mathrm{d}t=0$$

不失一般性，$\forall\lambda\in(0,1]$，不妨设前式成立，并令

$$g_n(t)=\mu(A_n\cap(f_\lambda^-)_t),\quad n=1,2,\cdots,\forall t\in\mathbf{R}_+=(0,+\infty)。$$

显然，函数列$\{g_n(t)\}$是非负可测的，这时式(1) 可暂表为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}g_n(t)\mathrm{d}t=0。$$

并且函数列$\{g_n(t)\}$在 $\mathbf{R}_+$ 上是 Lebesgue 可积的。这时，对每个固定的自然数 n 来说，显然函数 $g_n(t)$ 关于变量 t 是递减的，再由引理 1 知，$\forall\lambda\in(0,1]$，必有

$$\lim_{n\to\infty}g_n(t)=\lim_{n\to\infty}\mu\Big(A_n\cap(f_\lambda^-)_t\Big)=0,\ \forall t\in(0,+\infty)\tag{4}$$

同理方法，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，也可获得

$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(A_n\cap(f_\lambda^+)_t\Big)=0,\quad\forall t\in(0,+\infty)\tag{5}$$

现不妨设式(4) 成立，则对任意固定的 $t>0$，由模糊测度 μ 满足伪 S 性，故 $\forall A\in\Re$，必存在子集列 $\{A_{n_k}\cap(f_\lambda)_t\}\subset\{A_n\}$ 使得

$$\mu\Big(A-\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\Big(A_{n_k}\cap(f_\lambda^-)_t\Big)\Big)=\mu(A),\tag{6}$$

显然，$A\cap(f_\lambda^-)_t\in\Re$，故以 $A\cap(f_\lambda^-)_t$ 替代A 来代入式(6)，这时式(6) 左端为

$$\mu\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t-\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\Big(A_{n_k}\cap(f_\lambda^-)_t\Big)\Big)=\mu\Big[\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}(A_{n_k})^c\Big)\cup(A\cap(f_\lambda^+)_t\cap(f_\lambda^+)_t^c)\Big]=$$
$$\mu\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t-\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\Big)。$$

因此，$\forall\lambda\in(0,1]$，$\forall\ t\in(0,+\infty)$，上述式(6) 退化为

$$\mu\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t-\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\Big)=\mu\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t\Big)。\tag{7}$$

同理方法，针对 $A\cap(f_\lambda^+)_t\in\Re$，$\forall\lambda\in(0,1]$，也可得

$$\mu\Big(A\cap(f_\lambda^+)_t-\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\Big)=\mu\Big(A\cap(f_\lambda^+)_t\Big),\forall t\in(0,+\infty)。\tag{8}$$

这时，$\forall A \in \Re$，由定义 1.9，再结合式(7) 与式(8),必有

$$\tilde{\nu}\Big(\Big(A - \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\Big) = \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\Big[\int_0^{+\infty}\mu\big(\big(A - \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\big)\cap(f_\lambda^-)_t\big)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{+\infty}\mu\,\big(\big(A - \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\big)\cap(f_\lambda^+)_t\big)\,\mathrm{d}t\Big] = \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\Big[\int_0^{+\infty}\mu\big(A\cap(f_\lambda^-)_t - \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\big)\,\mathrm{d}t],$$

$$\int_0^{+\infty}\mu\big(A\cap(f_\lambda^+)_t - \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}\big)\,\mathrm{d}t\Big] = \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\Big[\int_0^{+\infty}\mu\Big(\Big(A\cap(f_\lambda^-)_t\Big)\,\mathrm{d}t,\int_0^{+\infty}\mu\Big(\Big(A\cap(f_\lambda^+)_t\Big)\,\mathrm{d}t\Big] =$$

$$(C)\int_A \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \tilde{\nu}(A)。$$

因此，由定义 1.7 知，当模糊测度 μ 满足伪 S 性时，由模糊值 Choquet 积分定义的模糊值集函数 $\tilde{\nu}$ 仍具有伪 S 性。

参考文献:

[1] WANG Zhenyuan. The autocontinuity of set function and the fuzzy integral[J]. J Math Anal Appl, 1984, 99:195-218.

[2] WANG Zhenyuan. Asymptotic structural characteristics of fuzzy measure and their applications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 16: 227-290.

[3] ZHANG Guangquan. Fuzzy number-valued measure and fuzzy number-valued fuzzy integral on the fuzzy set[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49(3):357-376.

[4] WANG Zhenyuan, GEORGE J Klir, WANG Wei. Monotone set functions defined by Choquet integral[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 81(2):241-250.

[5] WANG Guijun, LI Xiaoping. On the convergence of the fuzzy valued functional defined by μ-integrable fuzzy valued functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 107(2):219-226.

[6] 王贵君,李晓萍. Autocontinuity and preservation of structural characteristics of generalized fuzzy number valued Choquet integrals[J]. 数学进展, 2005, 34 (1):91-100.

[7] 王贵君,李晓萍. 广义模糊数值 Choquet 积分的伪自连续及其遗传性[J].系统科学与数学, 2006, 26(4):126-132.

[8] 张广全. 模糊测度论[M]. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994.

[9] 哈明虎, 吴从▮. 模糊侧度与模糊积分理论[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

(编辑:陈丽萍)