第 43 卷 第 1 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008 年 1 月
Vol.43 No.1 Journal of Shandong University(Natural Science) Jan. 2008

文章编号:1671-9352(2008)01-0095-03

覆盖广义粗糙集理论中的 LF 拓扑方法

孙守斌, 孟广武
(聊城大学数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要:从 LF 拓扑学的角度来探讨覆盖广义粗糙集理论,在 LF 拓扑空间中定义了相对内部和相对闭包,并讨论了它们的基本性质.这些性质不仅对粗糙集理论,而且对于 LF 拓扑学本身也有重要意义.

关键词: L-fuzzy 拓扑学;粗糙集;覆盖广义粗糙集
中图分类号:O159 **文献标志码**:A

LF-topological methods on the theory of covering generalized rough sets

SUN Shou-bin, MENG Guang-wu
(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, China)

Abstract: The theory of covering generalized rough sets was studied with L-fuzzy topology. The relative interior and closure operators were defined in L-fuzzy topological space and their basic properties were discussed. These results can be considered as the fundamental theory of rough sets and L-fuzzy topology.

Key words: L-fuzzy topology; rough set; covering generalized rough set

波兰人 Pawlak 建立的粗糙集理论在数据挖掘中得到了广泛的应用。经典粗糙集是以完备信息系统为研究对象,以等价关系(满足自反性、对称性、传递性)为基础,把论域分成互不相交的等价类,划分越细,信息量就越大。每一个粗糙集都有一定的模糊性,文[1]研究了其模糊性,并讨论了模糊度的一些重要性质,文[2]从经典拓扑学角度来研究覆盖广义粗糙集理论,在拓扑空间中讨论了相对内部、相对闭包等概念,并得出了一些很有意义的结论。由于粗糙集的模糊性,那么从模糊拓扑学的角度来探讨覆盖广义粗糙集理论也是很自然的,本文试图在 LF 拓扑空间中来讨论它们的性质。

Pawlak 近似空间可表示为一个二元组(U,R),其中 U 是非空集合,R 为 U 上的等价关系。设 A 是 U 的子集,则 A 在 Pawlak 近似空间(U,R)中的下、上近似集可表示为:

$$\underline{R}(A)=\{x\in U\mid [x]_R\subset A\},\ \bar{R}(A)=\{x\in U\mid [x]_R\cap A\neq\emptyset\}。$$

若$\underline{R}(A)\neq\bar{R}(A)$,称 $R(A)=(\underline{R}(A),\bar{R}(A))$为 Pawlak 近似空间$(U,R)$中 A 的粗糙集,若$\underline{R}(A)=\bar{R}(A)$,称 A 是精确的。

不妨把空间(L^X,R)称为 L-Pawlak 近似空间,其中 X 是非空集合,R 为 L^X 上的等价关系,$A\in L^X$,则 A 在 L-Pawlak 近似空间(L^X,R)中的下、上近似集可表示为:

$\underline{R}_L(A)=\{B\in L^X\mid [B]_R\leqslant A\}$,$\bar{R}_L(A)=\{B\in L^X\mid [B]_R\wedge A\neq 0\}$,其中$[B]_R$ 表示 B 的等价类,若$\underline{R}_L(A)\neq\bar{R}_L(A)$,称 $R_L(A)=(\underline{R}_L(A),\bar{R}_L(A))$为 L-Pawlak 近似空间$(L^X,R)$中 A 的粗糙集,若$\underline{R}_L(A)=\bar{R}_L(A)$,称 A 是精确的。

文中使用而未加说明的概念和记号均合于[1-4],其中 L 总表示 F 格。

收稿日期:2007-06-07
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2003A01)
作者简介:孙守斌(1972-),男,硕士研究生,研究方向为格上拓扑学.Email: lcssb@126.com

1 LF 拓扑空间的相对内部和相对闭包

定义 1.1[3] 设(L^X,δ)是 LF 拓扑空间,$u\subset L^X$。如果$\vee u=1$,则称 u 为(L^X,δ)的覆盖。这时如果 $u\subset\delta$,则称 u 为(L^X,δ)的开覆盖。当 $v\subset u$ 且$\vee v=1$ 时,称 v 为 u 的子覆盖。

定义 1.2[3] 设(L^X,δ)是 LF 拓扑空间,$\beta\subset\delta$,则 β 叫做 δ 的基,若 δ 的每个开集都可表示为 β 中若干个开集的并。设 $\gamma\subset\delta$,如果 γ 中的开集的有限交的全体构成 δ 的基,则称 γ 为 δ 的子基。特别地,δ 是其自身的基与子基。

定理 1.1[3] 设 L 是 F 格,X 是非空集,$\gamma\subset L^X$且$\vee\gamma=1$,则 L^X 上有惟一的 LF 拓扑 δ 使 γ 是 δ 的子基。称 δ 为由 γ 生成的 LF 拓扑。

定义 1.3 在 LF 拓扑空间(L^X,δ)中,$A\in L^X$,γ 如定理 1.1 所说。令$i_r(A)=\vee\{B\in\gamma\mid B\leqslant A\}$,则称 $i_\gamma(A)$为 A 关于γ 的相对内部。令$C_\gamma(A)=(i_\gamma(A'))'$,则称 $C_\gamma(A)$为 A 关于γ 的相对闭包。

显然,定义 1.3 中 A 关于γ 的相对内部$i_\gamma(A)$就是 L-Pawlak 近似空间的下近似集; A 关于γ 的相对闭包 $C_\gamma(A)$就是 L-Pawlak 近似空间的上近似集。当 γ 为δ 的基时,A 关于γ 的相对内部和相对闭包分别是LF 拓扑空间(L^X,δ)中的内部和闭包。即 $i_\gamma(A)=i(A)$,$C_\gamma(A)=C(A)$。

定理 1.2 设(L^X,δ)是以 γ 为子基生成的LF 拓扑空间,A、$B\in L^X$,则下列各命题成立:

(1) $i_\gamma(A)$为(L^X,δ)中的开集,且 $i_\gamma(A)\leqslant i(A)\leqslant A$;

(2) $C_\gamma(A)$为(L^X,δ)中的闭集,且 $C_\gamma(A)\geqslant C(A)\geqslant A$;

(3) $x\in C_\gamma(A)$当且仅当对于任一 $B\in\gamma$,$x\in B$,有 $B\wedge A\neq 0$;

(4) $i_\gamma(1)=1$,$i_\gamma(0)=0$,$C_\gamma(1)=1$,$C_\gamma(0)=0$;

(5) 若 $B\in\gamma$,则 $i_\gamma(B)=B$;

(6) 若 $B\leqslant A$,则 $i_\gamma(B)\leqslant i_\gamma(A)$,$C_\gamma(B)\leqslant C_\gamma(A)$;

(7) $i_\gamma(i_\gamma(A))=i_\gamma(A)$,$C_\gamma(C_\gamma(A))=C_\gamma(A)$。

证明 由定义 1.3 易得。

定理 1.3 设(L^X,δ)是以 γ 为子基生成的LF 拓扑空间,$A\in L^X$,且 A 可表示为γ 的若干个元之并,则 $i_\gamma(A)=A$。

证明 由定义 1.3 知,$i_\gamma(A)\leqslant A$ 成立,下证 $A\leqslant i_\gamma(A)$。$\forall x\in A$,因 A 可表示为γ 的若干个元之并,即 $A=\bigvee_{t\in T}\gamma_t$(其中 T 是指标集),所以存在$T_0\subset T$ 使 $x\in\bigvee_{t\in T_0}\gamma_t$。令 $B=\bigvee_{t\in T_0}\gamma_t$,则 $B\in\gamma$ 使得 $x\in B\leqslant A$,则 $x\in i_\gamma(A)$,即 $A\leqslant i_\gamma(A)$,故$i_\gamma(A)=A$。

值得说明的是:

(1) 在 LF 拓扑空间中的相对内部和相对闭包具有内部和闭包的一些性质,但也有一些差异。比如 $i_\gamma(A\wedge B)\neq i_\gamma(A)\wedge i_\gamma(B)$;$C_\gamma(A\vee B)\neq C_\gamma(A)\vee C_\gamma(B)$。文[2]中的例 2.6 正说明了这一点。

(2) 在文[2]中,例 2.3 说明同一集合相对于同一拓扑的不同子基的相对内部可能不同,相对闭包也可能不同。自然地,在 LF 拓扑空间中也有同样的结论。那么在什么条件下,同一拓扑的两个子基会生成相同的内部和相同的闭包? 下面我们就来讨论这个问题。

定义 1.4 设(L^X,δ)是以 γ 为子基生成的LF 拓扑空间,$B\in\gamma$,如果 B 可以表示成$\gamma-\{B\}$中若干个元之并,则称 B 是γ 的可约元。否则,称 B 是不可约元。如果 γ 中任一元都是不可约元,则称 γ 是约简的。

定理 1.4 设 γ 是LF 拓扑空间(L^X,δ)的一个子基,B 是γ 的可约元,令 $\gamma_1=\gamma-\{B\}$,则 γ_1 仍是(L^X,δ)的一个子基。

证明 因为 B 是可约元,则$\vee\gamma_1=1$。设 $G\in\delta$,$x\in G$,则存在有限元 $B_1,B_2,\cdots,B_n\in\gamma$ 使得$x\in B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_n\leqslant G$。若对任一 i,$B_i\neq B$,则 $B_i\in\gamma_1(i=1,2,\cdots,n)$。若 B_i 中有等于B 的情况,不妨设只有一个 $B_1=B$,因 B 是γ 的可约元,所以 B 可表示为γ_1 中若干个元的并。因此,必存在 $B_{i0}=\bigvee_{i\in T}\gamma_i$(其中 T 是指

标集,$\gamma_i\in\gamma_1$),使得 $x\in B_{i0}\leqslant B_1$。于是 $x\in B_{i0}\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_n\leqslant G$。这就证明了 γ_1 中任意有限个成员的交所构成的集族为拓扑 δ 的基。所以 γ_1 仍是(L^X,δ)的一个子基。

推论 1.1　设 γ 是 LF 拓扑空间(L^X,δ)的一个子基,γ_1 为 γ 的约简,则 γ_1 仍是(L^X,δ)的一个子基。

定理 1.5　设 γ 是 LF 拓扑空间(L^X,δ)的一个子基,B 是 γ 的可约元,令 $\gamma_1=\gamma-\{B\}$,则 $\forall A\in L^X$,有(1) $i_\gamma(A)=i_{\gamma_1}(A)$;(2) $C_\gamma(A)=C_{\gamma_1}(A)$。

证明　只证(1),类似的可证(2)。

$\forall x\in i_\gamma(A)$,于是 $\exists B_1=\bigvee\limits_{i\in T}\gamma_i$(其中 T 是指标集,$\gamma_i\in\gamma$),使 $x\in B_1\leqslant A$。若 $B_1=B$,由 B 是 γ 的可约元得 B_1 可表示为 γ_1 中若干个元的并,所以 $\exists B_2=\bigvee\limits_{j\in T_1}\gamma_j$(其中 T_1 是指标集,$\gamma_j\in\gamma_1$),使 $x\in B_2\leqslant B_1\leqslant A$,于是 $x\in i_{\gamma_1}(A)$,即 $i_\gamma(A)\leqslant i_{\gamma_1}(A)$。若 $B_1\neq B$,则 $B_1\in\gamma_1$,同样有 $i_\gamma(A)\leqslant i_{\gamma_1}(A)$。反之,$\forall x\in i_{\gamma_1}(A)$,则 $\exists B_1=\bigvee\limits_{i\in T'}\gamma_i$(其中 T' 是指标集,$\gamma_i\in\gamma_1$),使 $x\in B_1\leqslant A$。所以 $x\in i_\gamma(A)$,即 $i_{\gamma_1}(A)\leqslant i_\gamma(A)$,故 $i_\gamma(A)=i_{\gamma_1}(A)$。

由此定理我们得下面的推论。

推论 1.2　设 γ 是 LF 拓扑空间(L^X,δ)的一个子基,γ_1 是 γ 的约简,则 $\forall A\in L^X$,有 $i_\gamma(A)=i_{\gamma_1}(A)$,$C_\gamma(A)=C_{\gamma_1}(A)$。

定理 1.6　设 β、β_1 是 LF 拓扑空间(L^X,δ)的两个子基,γ、γ_1 分别是它们的约简,则 β、β_1 生成相同的相对内部或相对闭包的充分必要条件是 $\gamma=\gamma_1$。

证明　由对偶性,只证相对内部运算的情形。充分性显然,下证必要性。

设 $A\in\gamma$,由定理 1.2(5)知 $i_\gamma(A)=A$,又 $i_\gamma(A)=i_{\gamma_1}(A)$,则 $A=i_{r_1}(A)=\vee\{B\in\gamma_1\mid B\leqslant A\}$,即 A 可表示为 γ_1 中若干个元之并,不妨设 $A=\bigvee\limits_{k\in T_1}A_k$,($T_1$ 是指标集),于是 $i_{\gamma_1}(A_k)=A_k$,又 $i_\gamma(A_k)=i_{\gamma_1}(A_k)$,所以 $i_\gamma(A_k)=A_k$,从而每个 A_k 又可表示成 γ 中若干个元之并。不妨设 $A_k=\bigvee\limits_{m\in T_2}A_{k_m}$($T_2$ 是指标集)于是 $A=\bigvee\limits_{k\in T_1}(\bigvee\limits_{m\in T_2}A_{k_m})$,由 γ 是约简子基知 A 是 γ 的不可约元。因此,$\exists k\in T_1,m\in T_2$ 使 $A=A_{k_m}$。故 $A=A_k\in\gamma_1$,即 $\gamma\subset\gamma_1$。同理可证 $\gamma_1\subset\gamma$,所以 $\gamma=\gamma_1$。

2　相对内部和相对闭包

定义 2.1　设 X 是一个非空集合,设 $i^*:L^X\to L^X$ 满足:

(1) $i^*(1)=1$;

(2) $\forall A\in L^X,i^*(A)\leqslant A$;

(3) 若 A、$B\in L^X$,且 $B\leqslant A$,则 $i^*(B)\leqslant i^*(A)$;

(4) $\forall A\in L^X,i^*(i^*(A))=i^*(A)$。

则称 $i^*:L^X\to L^X$ 是弱内部算子。

定理 2.1　设 $i^*:L^X\to L^X$ 是弱内部算子,则存在 LF 拓扑(L^X,δ),使 δ 有子基 γ 对于任意的 $A\in L^X$ 有 $i_\gamma(A)=i^*(A)$。

证明　设 $\gamma=\{A\in L^X\mid i^*(A)=A\}$,由定理 1.1 知,存在 L^X 上的一个拓扑 δ 以 γ 为子基。设 $A\in L^X$,则 $i_\gamma(A)=\vee\{B\in\gamma\mid B\leqslant A\}$,于是对于 $B\in\gamma$ 有 $i^*(B)=B$,又 $B\leqslant A$,故 $i^*(B)\leqslant i^*(A)$,所以 $B\leqslant i^*(A)$。又 B 是 $i_\gamma(A)$中的元素,则 $i_\gamma(A)\leqslant i^*(A)$。反之,由 $i^*(i^*(A))=i^*(A)$知 $i^*(A)\in\gamma$。又 $i^*(A)\leqslant A$,则由 i_γ 的定义得 $i_\gamma(A)\geqslant i^*(A)$,于是 $i_\gamma(A)=i^*(A)$。

类似地可得定义 2.2 及定理 2.2。

定义 2.2　设 X 是一个非空集合,设 $C^*:L^X\to L^X$ 满足:

(1) $C^*(0)=0$;

(下转第 102 页)

(上接第97页)

(2) $\forall A \in L^X, A \leqslant C^*(A)$;

(3) 若 A、$B \in L^X$,且 $B \leqslant A$,则 $C^*(B) \leqslant C^*(A)$;

(4) $\forall A \in L^X, C^*(C^*(A)) = C^*(A)$。

则称 $C^*: L^X \to L^X$ 是弱闭包算子。

定理 2.2 设 $C^*: L^X \to L^X$ 是弱闭包算子,则存在 LF 拓扑(L^X, δ),它有一个子基 γ 对于任意的$A \in L^X$,有 $C_\gamma(A) = C^*(A)$。

参考文献:

[1] 徐伟华,张文修.覆盖广义粗糙集的模糊性[J]. 模糊系统与数学,2006,20(6):115-121.

[2] 李进金. 覆盖广义粗集理论中的拓扑学方法[J].模式识别与人工智能,2004,17(1):7-10.

[3] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1988.

[4] 李进金.由子基生成的内部算子和闭包算子[J].数学进展,2006,35(4):476-484.

(编辑:李晓红)