文章编号:1671-9352(2008)01-0088-03

对两种重要空间类 D-空间性质的研究

郭洪峰[1],张新[2]
(1. 山东大学数学与系统科学学院,山东 济南 250100;2. 山东经济学院数学与统计学院,山东 济南 250014)

摘要:主要得到下列结论:有限个满足 open(G)的拓扑空间的并空间是 D-空间;具有点可 数可扩张网络的拓扑空间是 D-空间.

关键词:邻域约定;D-空间;open(G);可数可扩张集族
中图分类号:O189.1 **文献标志码:**A

Research on two important classes of D-spaces

GUO Hong-feng[1], ZHANG Xin[2]
(1. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. School of Statistics and Mathematics, Shandong Economic University, Jinan 250014, Shandong, China)

Abstract: The results show that the union of a finite collection of spaces satisfying open(G) is a D-space, and the space having a point-countably expandable network is a D-space.

Key words: neighborhood assignment; D-space; open(G); point-countably expandable family

0 引言

E. van Douwen 在文献[1]中引入了 D-空间的概念,由于此类空间在一定条件下具有良好的覆盖性质,因此成为拓扑空间研究的一个重点。近些年,Arhangel'skii,Gruenhage,Buzyakova,Fleissner 和 Stanley 等拓扑学家对 D-空间进行了深入的研究,得到了众多重要结论,同时也提出了一些关键问题(参阅文献[2-7])。其中关于何种空间是 D-空间以及何种 D-空间的有限并是封闭的就是热点问题。Arhangel'skii 和 Buzyakova 在[2]中证明了具有点可数基的拓扑空间是 D-空间,Arhangel'skii 在[3]中又证明了该类空间的有限并也是 D-空间;在[5]中 Gruenhage 证明了满足 open(G)的拓扑空间是 D-空间(注:具有点可数集的空间满足 open(G),但是逆命题是否成立仍然是个开问题)。本文第一个主要结论正是对满足 open(G)的拓扑空间的有限并进行了探讨,证明了该类空间的有限并是 D-空间,对 D-空间的有限并的理论进行了扩展。

另外,为了更好地研究广义度量空间的性质,A. Dow, H. Junnila 和 J. Pelant 在[8]中引入了点可数可扩张集族的概念,并且得到了具有点可数可扩张网络的拓扑空间的一些重要刻画和性质描述。由点可数可扩张网络的定义可知,具有点可数可扩张网络的拓扑空间是具有点可数基的空间的推广。本文的第二个主要结论表明具有点可数可扩张网络的拓扑空间是 D-空间,从而对 D-空间的范畴进行了进一步的推广。

1 基本定义

定义 1.1 空间 X 的集合 A 称为离散集,如果对任意的 $x \in X$,都存在 x 的一个邻域至多含有 A 的一个

收稿日期:2007-05-30
作者简介:郭洪峰(1979-),男,博士研究生,主要从事一般拓扑学的研究. Email: ghf@mail.sdu.edu.cn

元素。

定义 1.2　空间 X 上的邻域指派就是从 X 到 X 的拓扑的一个映射 φ,满足对任意的 $x\in X$,有 $x\in\varphi(x)$。

定义 1.3　空间 X 称为 D-空间,如果对 X 上的任意的邻域指派 φ,存在 X 的离散闭集 D,使得集族 $\varphi(D)$覆盖空间 X。

定义 1.4　空间 X 满足 open(G),如果对所有 $x\in X$,我们有 x 的可数开邻域基 $\mathscr{B}_x$,使得对 $x\in\bar{A}$ 以及 x 的邻域 $N(x)$,存在 $a\in A$ 和 $B\in\mathscr{B}_a$,满足 $x\in B\subset N(x)$。

定义 1.5　空间 X 中的集族 $\mathscr{F}$ 称为 X 的网络,如果对任意的 $x\in X$ 以及 x 的邻域 U,都存在 $F\in\mathscr{F}$,使得 $x\in F\subset U$。

定义 1.6　空间 X 中的集族 $\mathscr{F}$ 称为点可数可扩张的,如果存在开集族 $\{G_F: F\in\mathscr{F}\}$,使得对每一 $F\in\mathscr{F}$,$F\subset G_F$,并且对每一 $x\in X$,集族 $\{F\in\mathscr{F}: x\in G_F\}$是可数的。

定义 1.7[3]　空间 X 的集合 A 称为局部闭的,如果集合 A 是 X 的闭子空间 $\bar{A}$ 的开集,即集合 A 在空间 X 中可以表示成一个闭集与一个开集的交。

2　主要结论

以下所有空间均为 T_1 空间。

引理 2.1　正则拓扑空间 $X=\bigcup_{i=1}^{k}X_i$,其中每一子空间 X_i 都是满足 open(G)的拓扑空间,令 $H_{i,j}=\overline{\bar{X}_i\cap X_j}$,其中 $i,j=1,\cdots,k$。那么空间 $M=\bigcap\{\overline{\bar{X}_i\cap X_j}: i,j=1,\cdots,k\}$也满足 open($G$)。

证明　由于证明方法相似,只给出 $k=2$ 的证明。

对每一个 $x\in X_i(i=1,2)$,令 $\mathscr{B}_x$ 为空间 X_i 中使得 X_i 满足 open(G)的 x 的可数邻域基。

任给 $x\in X_i$,$B\in\mathscr{B}_x$,令 $\varphi(B)$为满足 $\varphi(B)\cap X_i=B$ 的空间 $\overline{X_i}$ 中的最大开集。首先证明$\{\varphi(B): B\in\mathscr{B}_x\}$是空间 $\overline{X_i}$ 中 x 的邻域基:任给空间 $\overline{X_i}$ 中 x 的开邻域 U,由空间 $\overline{X_i}$ 的正则性知,存在 $\overline{X_i}$ 中的开邻域 V,$B\in\mathscr{B}_x$,使得 $B\subset V\subset\bar{V}\subset U$,那么 $\varphi(B)\subset U$;否则,存在 $y\in\varphi(B)-U$,那么 $\varphi(B)-\bar{V}$ 是 y 的开邻域并且满足 $(\varphi(B)-\bar{V})\cap X_i=\emptyset$,这与 $y\in\overline{X_i}$ 矛盾。

显然,$\{\varphi(B)\cap M: B\in\mathscr{B}_x\}$为空间 M 中 x 的可数邻域基。

任给 $x\in M\cap X_1$,由于 $x\in\overline{\overline{X_1}\cap X_2}$ 并且空间 M 在 x 处是第一可数的,从而存在可数集 $A_x\subset X_2$,使得 $x\in\overline{A_x}$。那么 $B_x^M=\{\varphi(B)\cap M,(\varphi(B)\cup\varphi(B_y))\cap M: B\in\mathscr{B}_x, y\in A_x, B_y\in\mathscr{B}_y\}$是空间 M 中 x 的可数邻域基。

这样对每一点 $x\in M$,得到 M 中 x 的可数邻域基 $\mathscr{B}_x^M$。

在空间 M 中,设 $a\in\bar{A}$ 并且 $N(a)$为 a 的邻域。不失一般性,设 $a\in X_1$。

(ⅰ) 如果 $a\in\overline{A\cap X_1}$,由空间 X_1 满足 open(G)以及空间 M 的正则性,不难证明,存在 $y\in A\cap X_1$,$B\in\mathscr{B}_y^M$,使得 $a\in B\subset N(a)$。

(ⅱ)如果 $A\subset X_2$,不失一般性,设 $A\subset N(a)$,$|A|=\omega$。任给 $y\in A$,由于 $y\in\overline{X_1}$,$y\in\overline{A_y}$(其中 $A_y\subset X_1$),那么 $a\in\overline{\bigcup_{y\in A}A_y}$。由空间 X_1 满足 open(G)可知,存在 $z\in\bigcup_{y\in A}A_y$,$B_z\in\mathscr{B}_z$,使得 $a\in\varphi(B_z)\subset N(a)$。设 $z\in A_{y_0}$,对某一 $y_0\in A$。由于 $y_0\in N(a)$,存在 $B\in\mathscr{B}_{y_0}$,使得 $\varphi(B)\subset N(a)$。从而 $\varphi(B)\cup\varphi(B_z)\subset N(a)$,并且 $(\varphi(B)\cup\varphi(B_z))\cap M\in\mathscr{B}_{y_0}^M$。

综上可知,结论成立。

引理 2.2[5]　每一满足 open(G)的拓扑空间是 D-空间。

引理 2.3[3]　如果空间 Y 是有限个局部闭的 D-空间的并,那么 Y 也是 D-空间。

下面定理的证明思路得益于[3,Theorem 1.14]的证明。

定理 2.1　如果正则空间 $X=\bigcup_{i=1}^{k}{}_i$,其中每一子空间 X_i 都是满足 open(G)的拓扑空间,那么 X 是 D-空

间。

证明　利用归纳法。假设对小于 k 个空间的并,结论成立。令 $H_{i,j}=\overline{\overline{X_i}\cap X_j}$, $W_{i,j}=\overline{X_i}-H_{i,j}$,其中 $i, j=1,\cdots,k$,再令 $M=\bigcap\{\overline{\overline{X_i}\cap X_j}:i,j=1,\cdots,k\}$。

对 $i\neq j$, $W_{i,j}\cap X_j=\emptyset$。因此 $W_{i,j}$是$\leqslant k-1$ 个满足 open(G)的空间的并,由归纳假设知 $W_{i,j}$是 D-空间。显然,$W_{i,j}$在空间X 中是局部闭的。对每一 $i=1,\cdots,k$,空间 $V_i=X-\overline{X_i}$也是局部闭的。由于 $V_i\cap X_i=\emptyset$,空间 V_i 也是$\leqslant k-1$ 个满足 open(G)的空间的并,从而由假设可知 V_i 为 D-空间。由引理 2.3 可知,X 的子空间$E=(\bigcup\{W_{i,j}:i,j=1,\cdots,k\})\cup(\bigcup\{V_i:i=1,\cdots,k\})$是 D-空间(当 $i=j$ 时,$W_{i,j}=\emptyset$)。任取 $x\in X-E$,那么对所有的 $i,j=1,\cdots,k$,都有 $x\in\overline{X_i}$, $x\notin W_{i,j}$。由此可知对所有的 $i,j=1,\cdots,k$,我们有 $x\in H_{i,j}$,从而 $x\in M$,进而可知,$X=E\cup M$。

由引理 2.1,引理 2.2 知,M 是 D-空间。又由于 M 是X 的闭子空间,因此空间 X 是 D-空间。

定理 2.2　具有点可数可扩张网络的拓扑空间是 D-空间。

证明　设$\mathscr{F}$是空间 X 的点可数可扩张网络,那么存在开集族$\{G_F:F\in\mathscr{F}\}$,使得对任一 $F\in\mathscr{F}$, $\boldsymbol{F}\subset\boldsymbol{G_F}$,并且对任意的 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$,集族$\{\boldsymbol{F}\in\mathscr{F}:x\in G_F\}$是可数的。

对每一 $x\in X$,记 $\mathscr{L}_x=\{F\in\mathscr{F}:x\in G_F\}$,并对 $\mathscr{L}_x$ 进行良序化。同时良序化 $X=\{x_\alpha:\alpha<\lambda\}$。

设 φ 为空间X 上的任一邻域指派。利用超限归纳法,定义 X 的可数子集D_α。

步骤 0　令 $D_0=\emptyset$。

假设对所有的 $\beta<\alpha$, D_β 都已经定义。

步骤 α　如果 d_n 在子步骤n 中被选择,将在步骤 p^n 中返回d_n,其中 p 为素数。

子步骤 1　选取 X 中第一个满足下面条件的d_1:

$$d_1\notin W=\bigcup\{\varphi(d):d\in D_\beta,\text{对某一 }\beta<\alpha\}。$$

如果没有这样的元素存在,令 $D_\alpha=\emptyset$,并停止所有步骤。

子步骤 n　如果 n 至少有两个不同的素因子,选取 X 中第一个满足下面条件的d_n:

$$d_n\notin W\cup\varphi(d)\cup\cdots\cup\varphi(d_{n-1})。$$

如果 $n=p^m$, p 为某一素数,选取第一个满足下面要求的 $F\in\mathscr{L}_x$:

要求(α,n):存在$d_n\notin W\cup\varphi(d)\cup\cdots\cup\varphi(d_{n-1})$,使得 $d_n\in F\subset\varphi(d_n)$。

无论是否存在这样的 d_n,都进行下一子步骤。

令 D_α 为步骤α 中选取的所有d_n组成的集合。

置 $D=\{D_\alpha:\alpha<\lambda\}$。首先证明 $X=\bigcup\limits_{d\in D}\varphi(d)$。任取 $x_\alpha\in X$,必有 $x_\alpha\in\bigcup\{\varphi(d):d\in\bigcup\{D_\gamma:\gamma\leqslant\alpha\}\}$:利用超限归纳法,假设该公式对任一$\beta<\alpha$ 成立,如果$x_\alpha\notin\bigcup\{\varphi(d):d\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}D_\beta\}$,那么有 $x_\alpha=d_1\in D_\alpha$,从而上面公式对 α 也成立。

现在证明 D 是离散闭集。任取 $x\in X$,设 α 为满足$x\in\bigcup\{\varphi(d):d\in\bigcup\{D_\gamma:\gamma\leqslant\alpha\}\}$的最小的序数,并设子步骤 n 是步骤α 中第一个满足$x\in\varphi(d_n)$的子步骤。由 D 的定义,只需要证明 x 可被开集与$\bigcup\limits_{\beta<\alpha}D_\beta$ 分离。固定 $F\in\mathscr{F}$,使得 $x\in F\subset\varphi(x)$。假设存在 $d\in D_\beta$,其中 $\beta<\alpha$,使得 $d\in\varphi(x)\cap G_F$,那么 $F\in\mathscr{L}_d$。设 d 是步骤β 的子步骤m 中得到的元素,由于 $x\notin\bigcup\{\varphi(d):d\in\bigcup\{D_\gamma:\gamma<\alpha\}\}$,那么 F 在步骤β 的每一子步骤 p^m(p 为素数)中满足要求(β,p^m)。因此必存在某一素数 p_0,使得 F 为第一个满足要求(β,p_0^m)的 L_d 中的元素。因此,$x\in F\subset\bigcup\{\varphi(d):d\in D_\beta\}$,这与 α 的选取矛盾,从而 $\varphi(x)\cap G_F\cap(\bigcup\limits_{\beta<\alpha}D_\beta)=\emptyset$。

综上可知,X 是 D-空间。

致谢:我们感谢 Heikki Junnila 的建议和帮助。第一作者更是感谢在赫尔辛基大学学习期间 Heikki Junnila 给予的无私帮助,感谢国家留学基金委给予的资助。

(下转第 102 页)

(上接第 90 页)

参考文献:

[1] VAN DOUWEN E K, PFEFFER W. Some properties of the Sorgenfrey line and ralated spaces[J]. Pacific J Math, 1979, 81:371-377.
[2] ARHANGEL'SKII A V, BUZYAKOVA R Z. Addition theorems and D-spaces[J]. Comment Math Univ Carolin, 2002, 43(4):653-663.
[3] ARHANGEL'SKII A V. D-spaces and finite unions[J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132(7):2163-2170.
[4] ARHANGEL'SKII A V. D-spaces and covering properties[J]. Topology Appl, 2005, 146-147:437-449.
[5] GRUENHAGE G. A note on D-spaces[J]. Topology Appl, 2006, 153(13):2229-2240.
[6] BUZYAKOVA R Z. Hereditary D-property of function spaces over compacta[J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132(11):3433-3439.
[7] FLEISSNER W, STANLEY A. D-spaces[J]. Topology Appl, 2001, 114:261-271.
[8] DOW A, JUNNILA H, PELANT J. Coverings, networks, and weak topologies[J]. Mathemetika, 2006, 53:287-320.

(编辑:李晓红)