文章编号:1671-9352(2008)02-0072-05

欧阳不等式的推广及其应用

高庆龄,王建国
(山东教育学院数学与应用数学系,山东 济南 250013)

摘要:建立了若干个欧阳型非线性积分不等式,并利用所得结果讨论了一类微分方程的解的性质,这些结果本质上改进或推广了已有的相关结果。

关键词:不等式;微分方程
中图分类号:O1754.1;O1755.7 **文献标志码**:A

Some generalizations of Ou-Iang's inequality and its applications

GAO Qing-ling, WANG Jian-guo
(Department of Mathematics and Applied Mathematics, Shandong Institute of Eduction, Jinan 250013, Shandong, China)

Abstract: Some new Ou-Iang's inequalities for the nonlinear integral type were established, which can generalize and improve some established results, and the character of the solutions of differential equations was discussed by using the conclusions.

Key words: inequality; differential equation

0 引言

1957 年,欧阳亮给出了以下不等式[1]:

引理 1 设 $u(t)$ 和 $f(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的实值非负连续函数,若对 $t\geqslant 0$ 及常数 $c\geqslant 0$ 有不等式 $u^2(t)\leqslant c^2+2\int_0^t f(s)u(s)\mathrm{d}s$, 则当 $t\geqslant 0$ 时,有 $u(t)\leqslant c+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$。

1979 年,Dafermos 给出了以下结论[2]:

引理 2 假设函数 $y(t)\in L^\infty[0,\tau]$, $g(t)\in L^1[0,\tau]$,并且函数 $y(t)$ 非负,α、M 和 N 为非负常数,如果

$$y^2(t)\leqslant M^2y^2(0)+2\int_0^t[\alpha y^2(s)+Ng(s)y(s)]\mathrm{d}s,\ t\in[0,\tau],$$

则有

$$y(t)\leqslant M\mathrm{e}^{\alpha t}y(0)+N\mathrm{e}^{\alpha t}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,\tau]。$$

近年来,Pachpatte 对欧阳不等式作了一系列的推广研究工作,给出了如下定理[3-5]:

引理 3 设函数 $u(t),f(t),h(t),g(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数,c 是常数且 $c\geqslant 0$,如果

$$u^2(t)\leqslant c^2+2\int_0^t[f(s)u^2(s)+h(s)w(u(s))]\mathrm{d}s,\ t\in\mathbf{R}_+,$$

收稿日期:2007-09-30
作者简介:高庆龄(1971-),女,硕士,副教授,研究方向为微分方程.Email: wgb911@163.com
王建国(1965-),男,博士,教授,研究方向为非线性泛函分析.Email: jgw0801@163.com

则 $u(t) \leqslant p(t)\exp\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$,其中 $p(t) = c + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s, t \in \mathbf{R}_+$,其中 $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$。

1 主要结果

定义 设 $g:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$,如果 $g(u)$ 单调不减且当 $u \geqslant 0, v \geqslant 1$ 时,$\frac{1}{v}g(u) \leqslant g\left(\frac{u}{v}\right)$,称 g 属于函数类 F, 记作 $g \in F$。

定理 1 设 $u(t), f(t), h(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数,$a(t)$ 与 $p(t)$ 是实值非负连续函数,$a(t)$ 单调不减,并且当 $t > 0$ 时,$a(t) \geqslant 1, p(t) \geqslant 1$; $w(u) \in F$。如果

$$u^2(t) \leqslant a^2(t) + 2p^2(t)\int_0^t [f(s)u^2(s) + h(s)w(u(s))]\mathrm{d}s, \ t \in \mathbf{R}_+, \tag{1}$$

则有

$$u(t) \leqslant a(t)p(t)\left(1 + \int_0^t w(p(s))h(s)\mathrm{d}s\right)\exp\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s, \ t \in \mathbf{R}_+。 \tag{2}$$

证明 由于 $a(t) \geqslant 1$, $p(t) \geqslant 1, w \in F$ 并且 $a(t)$ 单调不减,因此得到

$$\begin{aligned}\frac{u^2(t)}{a^2(t)} &\leqslant 1 + 2p^2(t)\int_0^t \left[f(s)\frac{u^2(s)}{a^2(s)} + \frac{h(s)}{a^2(s)}w(u(s))\right]\mathrm{d}s \leqslant \\ &p^2(t)\left(1 + 2\int_0^t \left[f(s)\frac{u^2(s)}{a^2(s)} + \frac{h(s)}{a(s)}w\left(\frac{u(s)}{a(s)}\right)\right]\mathrm{d}s\right) \leqslant \\ &p^2(t)\left(1 + 2\int_0^t \left[f(s)\frac{u^2(s)}{a^2(s)} + h(s)w\left(\frac{u(s)}{a(s)}\right)\right]\mathrm{d}s\right),\end{aligned}$$

记

$$z(t) = 1 + 2\int_0^t \left[f(s)\frac{u^2(s)}{a^2(s)} + h(s)w\left(\frac{u(s)}{a(s)}\right)\right]\mathrm{d}s, \tag{3}$$

则 $z(0) = 1, z(t)$ 是单调不减函数,并且$\frac{u(t)}{a(t)} \leqslant \sqrt{z(t)}p(t)$。微分式(3),得

$$z'(t) = 2\left[f(t)\frac{u^2(t)}{a^2(t)} + h(t)w\left(\frac{u(t)}{a(t)}\right)\right] \leqslant 2[f(t)p^2(t)z(t) + h(t)w(p(t)\sqrt{z(t)})],$$

于是有

$$\frac{z'(t)}{2\sqrt{z(t)}} \leqslant f(t)p^2(t)\sqrt{z(t)} + h(t)w(p(t)), \tag{4}$$

从 0 到 t 对式(4) 积分,得

$$\sqrt{z(t)} \leqslant 1 + \int_0^t h(s)w(p(s))\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)p^2(s)\sqrt{z(s)}\mathrm{d}s,$$

故由 Bellman 不等式得

$$\sqrt{z(t)} \leqslant \left(1 + \int_0^t h(s)w(p(s))\mathrm{d}s\right)\exp\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s,$$

所以

$$u(t) \leqslant a(t)p(t)\left(1 + \int_0^t h(s)w(p(s))\mathrm{d}s\right)\exp\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s。$$

推论 1 设 $u(t), f(t), h(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数,$a(t)$ 与 $p(t)$ 是实值非负连续函数,$a(t)$ 单调不减,并且当 $t > 0$ 时, $a(t) \geqslant 1, p(t) \geqslant 1$。如果

$$u^2(t) \leqslant a^2(t) + 2p^2(t)\int_0^t [f(s)u^2(s) + h(s)u(s)]\mathrm{d}s, \ t \in \mathbf{R}_+,$$

则有

$$u(t) \leqslant a(t)p(t)\left(1 + \int_0^t h(s)p(s)\mathrm{d}s\right)\exp\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s。$$

推论 2　设 $u(t),f(t),h(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数,$a(t)$ 与 $p(t)$ 是实值非负连续函数,$a(t)$ 单调不减,并且当 $t>0$ 时,$a(t)\geqslant 1,p(t)\geqslant 1$;如果

$$u^2(t)\leqslant a^2(t)+Mp^2(t)\int_0^t[f(s)u^2(s)+h(s)u^q(s)]\mathrm{d}s,0\leqslant q<1,t\in\mathbf{R}_+,\tag{5}$$

则 $u(t)\leqslant a(t)p(t)\left[\left(1+M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t h(s)p^q(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{2-q}}$。

证明　与定理 1 类似,有

$$\frac{u^2(t)}{a^2(t)}\leqslant p^2(t)\left[1+M\int_0^t\left(f(s)\frac{u^2(s)}{a^2(s)}+h(s)\frac{u^q(s)}{a^q(s)}\right)\mathrm{d}s\right]。$$

令

$$z(t)=1+M\int_0^t\left(f(s)\frac{u^2(s)}{a^2(s)}+h(s)\frac{u^q(s)}{a^q(s)}\right)\mathrm{d}s,$$

由于 $\dfrac{u(t)}{a(t)}\leqslant p(t)\sqrt{z(t)}$,则有 $z'(t)\leqslant M[f(t)p^2(t)z(t)+h(t)p^q(t)z^{\frac{q}{2}}(t)]$,

$$\frac{z'(t)}{z^{\frac{q}{2}}(t)}\leqslant M[f(t)p^2(t)z^{\left(1-\frac{q}{2}\right)}(t)+h(t)p^q(t)],$$

从 0 到 t 积分上式,得 $\dfrac{1}{1-\frac{q}{2}}z^{\left(1-\frac{q}{2}\right)}(t)\leqslant\dfrac{1}{1-\frac{q}{2}}+M\int_0^t h(s)p^q(s)\mathrm{d}s+M\int_0^t f(s)p^2(s)z^{1-\frac{q}{2}}(s)\mathrm{d}s$,

整理得 $\sqrt{z(t)}^{(2-q)}\leqslant 1+M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t h(s)p^q(s)\mathrm{d}s+M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t f(s)p^2(s)\sqrt{z(s)}^{(2-q)}\mathrm{d}s$,

于是有 $\sqrt{z(t)}^{(2-q)}\leqslant\left(1+M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t h(s)p^q(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s\right)$,

即 $\sqrt{z(t)}\leqslant\left[\left(1+M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t h(s)p^q(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{2-q}}$,

从而 $u(t)\leqslant a(t)p(t)\left[\left(1+M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t h(s)p^q(s)\mathrm{d}s\right)\exp M\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\int_0^t f(s)p^2(s)\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2-q}}$。

定理 2　设 $u(t),f(t),h(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数,$a(t)$ 与 $p(t)$ 是实值非负连续函数,$a(t)$ 单调不减,并且当 $t>0$ 时,$a(t)\geqslant 1,p(t)\geqslant 1$;又设 $w_1,w_2\in F$,w_1 是次可乘的(对任意的 $x>0,y>0$,都有 $w_1(x\cdot y)\leqslant w_1(x)\cdot w_1(y)$)。如果

$$u^2(t)\leqslant a^2(t)+2p^2(t)\int_0^t[f(s)w_1(u^2(s))+h(s)w_2(u(s))]\mathrm{d}s,\ t\in\mathbf{R}_+,\tag{6}$$

则有

$$u(t)\leqslant a(t)p(t)\Omega^{-1}\left\{\Omega\left(1+\int_0^t h(s)w_2(p(s))\mathrm{d}s\right)+\int_0^t f(s)w_1(p^2(s))\mathrm{d}s\right\},\ t\in\mathbf{R}_+,\tag{7}$$

其中 $\Omega(u)=\int_{u_0}^u\dfrac{\mathrm{d}s}{w_1(s)},u>u_0\geqslant 0,\Omega^{-1}$ 是 Ω 的反函数。

定理 3　设 $u(t),f(t),h(t),g(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数,$a(t)$ 与 $p(t)$ 是实值非负连续函数,$a(t)$ 单调不减,并且当 $t>0$ 时,$a(t)\geqslant 1,p(t)\geqslant 1$;$w_1,w_2,w_3\in F$,且 w_1 是次可乘的。如果对任意的 $t\in\mathbf{R}_+$,有

$$u^2(t)\leqslant a^2(t)+2p^2(t)\int_0^t f(s)\left[w_1(u^2(s))+\int_0^s g(\tau)w_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s+2p^2(t)\int_0^t h(s)w_3(u(s))\mathrm{d}s,\tag{8}$$

则对任意的 $t\in\mathbf{R}_+$,有

$$u(t)\leqslant a(t)p(t)\Omega^{-1}\left\{\Omega\left[1+\int_0^t h(s)w_3(p(s))\mathrm{d}s+\int_0^t f(s)\int_0^s g(r)w_2(p(r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s\right]+\int_0^t f(s)w_1(p^2(s))\mathrm{d}s\right\},\tag{9}$$

其中 $\Omega(u)=\int_{u_0}^u\dfrac{\mathrm{d}s}{w_1(s)},u>u_0\geqslant 0,\Omega^{-1}$ 是 Ω 的反函数。

由于定理2和定理3的证明类似,这里只给出定理3的证明。

证明 类似于定理1,可以得到

$$\frac{u^2(t)}{a^2(t)} \leqslant p^2(t) \times \left\{1 + 2\int_0^t f(s)\left[w_1\left(\frac{u^2(s)}{a^2(s)}\right) + \int_0^s g(\tau)w_2\left(\frac{u(\tau)}{a(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s + 2\int_0^t h(s)w_3\left(\frac{u(s)}{a(s)}\right)\mathrm{d}s\right\}, \tag{10}$$

设

$$z(t) = 1 + 2\int_0^t f(s)\left[w_1\left(\frac{u^2(s)}{a^2(s)}\right) + \int_0^s g(\tau)w_2\left(\frac{u(\tau)}{a(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s + 2\int_0^t h(s)w_3\left(\frac{u(s)}{a(s)}\right)\mathrm{d}s, \tag{11}$$

则 $z(0) = 1, z(t)$ 是单调不减函数,并且$\frac{u(t)}{a(t)} \leqslant \sqrt{z(t)}\,p(t)$。微分式(11),得

$$z'(t) \leqslant 2f(t)w_1(p^2(t)z(t)) + 2f(t)\int_0^t g(s)w_2(p(s)\sqrt{z(s)})\mathrm{d}s + 2h(t)w_3(p(t)\sqrt{z(t)}),$$

于是

$$\frac{z'(t)}{2\sqrt{z(t)}} \leqslant f(t)w_1(p^2(t))w_1(\sqrt{z(t)}) + f(t)\int_0^t g(s)w_2(p(s))\mathrm{d}s + h(t)w_3(p(t)), \tag{12}$$

从0到 t 对式(12)积分,得

$$\sqrt{z(t)} \leqslant 1 + \int_0^t h(s)w_3(p(s))\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\int_0^s g(\tau)w_2(p(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)w_1(p^2(s))w_1(\sqrt{z(s)})\mathrm{d}s,$$

故

$$\sqrt{z(t)} \leqslant \Omega^{-1}\left\{\Omega\left[1 + \int_0^t h(s)w_3(p(s))\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\int_0^t g(\tau)w_2(p(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right] + \int_0^t f(s)w_1(p^2(s))\mathrm{d}s\right\},$$

于是有

$$u(t) \leqslant a(t)p(t) \times \Omega^{-1}\left\{\Omega\left[1 + \int_0^t h(s)w_3(p(s))\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\int_0^t g(\tau)w_2(p(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right] + \int_0^t f(s)w_1(p^2(s))\mathrm{d}s\right\}。$$

推论3 设 $u(t), f(t), h(t), g(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值非负连续函数, $w_1, w_2, w_3 \in F$,且常数 $c > 0$,如果对任意的 $t \in \mathbf{R}_+$,有

$$u^2(t) \leqslant c^2 + 2\int_0^t f(s)\left[u(s)w_1(u(s)) + \int_0^s g(\tau)w_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s + 2\int_0^t h(s)w_3(u(s))\mathrm{d}s,$$

则有 $u(t) \leqslant \Omega^{-1}\left\{\Omega\left[C^2 + \int_0^t h(s)w_3(1)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\int_0^s g(\tau)w_2(1)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right] + \int_0^t f(s)w_1(1)\mathrm{d}s\right\}$。

2 应用

定理4 设 $K: \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, F: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,且 K, F 连续。$r(t) > 0$ $r(t) = o(t)$。如果方程

$$(r(t)u(t)u'(t))' - F\left(t, u(t), \int_0^t K(t, s, u(s)\mathrm{d}s)\right) = 0, \tag{13}$$

满足初始条件 $u(0) = 1, u'(0) = 1$ 的解存在,并且

$$|f(t,u,v)| \leqslant f(t)[w_1(|u|) + w_2(|u^2|)] + |v|, \tag{*}$$

$$|K(t,s,u)| < f(t)g(s)w_3(|u|), \tag{**}$$

其中 f, g 为 $\mathbf{R}_+$ 上的实值非负连续函数 $w_1, w_2, w_3 \in F$, w_2 是次可乘的。则有

$$|u(t)| \leqslant M\left(1 + 2r(0)\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{r(s)}\right)^{1/2} \times \Omega^{-1}\left\{\Omega\left[1 + \int_0^t f(s)w_1(M)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)g(s)(t-s)w_3(M)\mathrm{d}s\right] + \int_0^t f(s)w_2(M^2)\mathrm{d}s\right\}$$

其中 $\Omega(u) = \int_{u_0}^u \frac{\mathrm{d}s}{w_2(s)}, u > u_0 \geqslant 0, \Omega^{-1}$ 是 Ω 的反函数。

证明　对方程(13)从 0 到 t 积分,得

$$r(t)u(t)u'(t)=r(0)+\int_0^t F\left(s,u(s),\int_0^s K(s,\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,$$

因为 $r(t)>0$,故有

$$u(t)u'(t)=\frac{r(0)}{r(t)}+\frac{1}{r(t)}\int_0^t F\left(s,u(s),\int_0^s K(s,\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s, \tag{14}$$

从 0 到 t 积分式(14),得

$$\frac{1}{2}u^2(t)=\frac{1}{2}+r(0)\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}+\int_0^t\frac{1}{r(s)}\int_0^s F\left(\tau,u(\tau),\int_0^\tau K(\tau,m,u(m))\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

即

$$u^2(t)\leqslant 1+2r(0)\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}+2\int_0^t\frac{1}{r(s)}\int_0^s\left|F\left(\tau,u(\tau),\int_0^\tau K(\tau,m,u(m))\mathrm{d}m\right)\right|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant$$

$$1+2r(0)\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}+2\int_0^t\frac{t-s}{r(s)}\left|F\left(s,u(s),\int_0^s K(s,\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{d}s,$$

由条件(＊)(＊＊),得

$$u^2(t)\leqslant 1+2r(0)\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}+2\int_0^t M^2 f(s)\left(w_1(|u(s)|)+w_2(|u^2(s)|)+\int_0^s g(\tau)w_3(|u(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=$$

$$1+2r(0)\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}2M^2\int_0^t\left[f(s)\left(w_2(|u^2(s)|)+\int_0^s g(\tau)w_3(|u(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right)+f(s)w_1(|u(s)|)\right]\mathrm{d}s,$$

其中 $M>0$ 是常数,利用定理 3 得

$$|u(t)|\leqslant M\left(1+2r(0)\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}\right)^{1/2}\times$$

$$\Omega^{-1}\left\{\Omega\left[1+\int_0^t f(s)w_1(M)\mathrm{d}s+\int_0^t f(s)g(s)(t-s)w_3(M)\mathrm{d}s\right]+\int_0^t f(s)w_2(M^2)\mathrm{d}s\right\},$$

其中 $\Omega(u)=\int_{u_0}^u\frac{ds}{w_2(s)}$,$u>u_0\geqslant 0$,$\Omega^{-1}$ 是 Ω 的反函数,从而得到方程(13)的解在$[0,t]$上有界。

参考文献:

[1] 欧阳亮.线性微分方程 $y''+A(t)y=0$ 解的有界性[J].数学进展,1957(3):409-415.

[2] DAFERMOS C M. The second law of thermodynamics and stability[J]. Arch Rational Mech Anal, 1979, 70:167-179.

[3] PACHPATTE B G. On an integral inequality of Gronwall-Bellman[J]. J Math Phys Sci, 1975, 9:405-416.

[4] PACHPATTE B G. On a certain inequalities arising in the theory of differential equation[J]. J Math Anal Appl, 1994, 182:143-157.

[5] PACHPATTE B G. On some new inequalities related to certain inequalities in the theory of differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189:128-144.

(编辑:李晓红)