第 43 卷 第 2 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008 年 2 月
Vol.43 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0066-04

# 特殊 $n$-Coherent 函子的性质

邢建民
(青岛科技大学数理学院, 山东 青岛 266061)

**摘要:**定义了 $n$-Coherent 函子, 并研究了特殊的 $n$-Coherent 函子间的余核和核,并给出了一些性质。

**关键词:**可表示; $n$-Coherent 函子;余核;核
**中图分类号:**O153 **文献标志码:**A

# The property of some special $n$-Coherent functor

XING Jian-min
(College of Mathematic and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, Shandong, China)

**Abstract**: A small $n$-Coherent functor is defined, and the co-kernel and kernel of some special $n$-Coherent functors were studied. Some properties of $n$-Coherent functor were described.

**Key words**: small represented; $n$-Coherent functor; co-kernel; kernel

## 0 引言

文献[1]中,Auslander 最早提出了 Coherent 函子的定义,文献[2]中 Hartshone 研究了 Noetherian 环上的有限生成子范畴上的 Coherent 函子,并给出了 Coherent 函子关于余核和核 以及扩张闭的性质。文献[3]中,Henning Krause 研究了在一个局部可表示的加法范畴中,Coherent 函子类对于可定义的一个共变有限的子范畴的作用。因此 Coherent 函子在代数表示论及几何中正发挥着越来越大的作用。但迄今对于 Coherent 函子定义的推广,还没有一个系统的研究。本文试着推广了 Coherent 函子, 定义了 $n$-Coherent 函子并在满足一定条件下给出特殊的 $n$-Coherent 函子的一些性质。

设 $R$ 是交换的 noetherian 环,$R$-Mod 是左 $R$-模范畴,设 $R$-mod 为有限生成的 $R$-模范畴。定义 $\mathscr{F}$为所有的共变有限的从 $R$-mod 到 $R$-mod 的 $R$-模线性函子的集合。

**定义 0.1**[2] 函子 $F\in\mathscr{F}$称为可表示的,如果存在 $M\in R$-mod 满足 $F=\mathrm{Hom}_R(M,-)$。定义函子 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$为 $h_M$。

注意到 $h: R$-mod$\to\mathscr{F}$, $M\to h_M$ 是共变有限的右正合函子,且注意到 $F$ 是 Abelian 范畴其核,余核等通过模定义的。

若 $F,G\in\mathscr{F}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(F,G)=\{t:F\to G$ 是自然传递$\}$,则其核 $K$ 定义为 $K(M)=\ker(F(M)\to G(M))$,余核 $C$ 定义为 $C(M)=\mathrm{coker}(F(M)\to G(M))$, $\forall M\in R$-mod。

**定义 0.2**[2] $F\in\mathscr{F}$称为有限生成的,如果存在一个正合列 $h_M\to F\to 0$, $\forall M\in R$-mod。

---

**收稿日期:**2007-11-26
**基金项目:**青岛科技大学科研启动基金资助项目(0022313)
**作者简介:**邢建民(1978- ),讲师,博士,研究方向为代数学.Email:xingjianmin1978@163.com

## 1 主要结果及其证明

**定义 1.1** 称 $F\in\mathscr{F}$为 $n$-Coherent 函子,若存在正合列 $h_{M_n}\to h_{M_{n-1}}\to\cdots\to h_{M_1}\to h_{M_0}\to F\to 0$ 其中 $M_i\in R$-mod, $i=0\cdots n$。

由定义得通常的 Coherent 函子即为 1-Coherent 函子。

**定理 1.1** （a）设 $n=3k+1$, $k\in N$, $F$ 和 $G$ 是 $n$-Coherent 函子。即存在下列正合列

$$h_{M_n}\to h_{M_{n-1}}\to\cdots\to h_{M_1}\to h_{M_0}\to F\to 0$$
$$h_{A_n}\to h_{A_{n-1}}\to\cdots\to h_{A_1}\to h_{A_0}\to G\to 0$$

其中 $M_i, A_i\in R$-mod, $i=0\cdots n$。

如果 $F\xrightarrow{f}G$ 是 $n$-Coherent 函子间的同态,且满足对任意 $i=3k+2, 0\leqslant i\leqslant n, k\in N$ 都有 $h_{M_i}\cong h_{A_i}$。则 coker$f$ 也是 $n$-Coherent 函子。

（b）若 $0\to F\to G\to H\to 0$ 是函子正合列，其中 $F$, $H$ 是 $n$-Coherent 函子，则 $G$ 也是 $n$-Coherent 函子。

**引理 1.1**[2] 对任意的 $M\in R$-mod，$F\in\mathscr{F}$,存在自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(h_M, F)\cong F(M)$。

由此引理可证 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(h_M, h_N)\cong h_N(M)=\mathrm{Hom}_R(N, M)$。

**引理 1.2**[2] 对任意的 $M\in R$-mod，函子 $h_M$ 是范畴 $\mathscr{F}$的投射对象。

**定理 1.1 的证明** （b）给定 $0\to F\to G\to H\to 0$，$F, H$ 是 $n$-Coherent 函子,并给定 $F$，$H$ 由表示函子的分解。因为所有的 $h_M$ 都是投射对象,可以构造 $G$ 得分解,其对象都是 $F$ 和 $H$ 分解对象的直和。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & h_{M_n} & \to & h_{M_n}\oplus h_{A_n} & \to & h_{A_n} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & h_{M_{n-1}} & \to & h_{M_{n-1}}\oplus h_{A_{n-1}} & \to & h_{A_{n-1}} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & h_{M_1} & \to & h_{M_1}\oplus h_{A_1} & \to & h_{A_1} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & h_{M_0} & \to & h_{M_0}\oplus h_{A_0} & \to & h_{A_0} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F & \to & G & \to & H & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

因为对所有的 $i=0\cdots n$，$h_{A_1}\oplus h_{M_i}\cong h_{A_i}\oplus M_i$可得到 $G$ 是 $n$-Coherent 函子。

（a）设态射 $f$: $F\to G$，其分解为

$$\begin{array}{ccccccccc}
h_{M_n} & \to\cdots\to & h_{M_1} & \to & h_{M_0} & \to & F & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
h_{A_n} & \to\cdots\to & h_{A_1} & \to & h_{A_0} & \to & G & \to & 0\\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & C & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $C=\mathrm{coker}f$。由于上述正合列都是投射分解，因此态射 $f$ 可以提升到分解上,再由图追踪可得到下列正

合列

$$h_{M_0}\oplus h_{A_1}\to h_{A_0}\to C\to。$$

因为 $n=3k+1$ 且对任意的 $i=3k+2$，$k\in N$，$0\leqslant i\leqslant n$，$h_{M_i}\cong h_{A_i}$，因此由[4]。Mayer-Vietoris Lemma 可得下列正合列：

$$h_{M_{n-1}}\oplus h_{A_n}\to h_{A_{n-1}}\to h_{M_{n-3}}\to h_{M_{n-4}}\oplus h_{A_{n-3}}$$
$$\to\cdots\to h_{M_1}\to h_{M_0}\oplus h_{A_1}\to h_{A_0}。$$

因此得到正合列

$$h_{M_{n-1}}\oplus h_{A_n}\to h_{A_{n-1}}\to h_{M_{n-3}}\to h_{M_{n-4}}\oplus h_{A_{n-3}}\to\cdots\to h_{M_1}$$
$$\to h_{M_0}\oplus h_{A_1}\to h_{A_0}\to C\to 0。$$

因此 $C$ 是 $n$- Coherent 函子。

**定理 1.2**　设 $n=3k$，$k\in N$，$F$ 和 $G$ 是 $(n+1)$- Coherent 函子。即存在下列正合列

$$h_{M_{n+1}}\to h_{M_n}\to\cdots\to h_{M_1}\to h_{M_0}\to F\to 0$$
$$h_{A_{n+1}}\to h_{A_n}\to\cdots\to h_{A_1}\to h_{A_0}\to G\to 0$$

其中 $M_i, A_i\in R$- mod, $i=0\cdots n$。

如果 $F\xrightarrow{h}G$ 是 $(n+1)$-Coherent 函子间的同态，且满足对任意 $i=3k, 0\leqslant i\leqslant n$，$k\in N$ 都有 $h_{M_i}\cong h_{A_i}$，则 $\ker h$ 是 $n$- Coherent 函子。

**证明**　设态射 $h:F\to G$，其分解为

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & K \arrow[d] & \\
h_{M_{n+1}} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & h_{M_1} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & h_{M_0} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
h_{A_{n+1}} \arrow[r, "g_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & h_{A_1} \arrow[r, "g_1"] & h_{A_0} \arrow[r, "g_1"] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $K=\ker h$。由于上述正合列都是投射分解，因此态射 $f$ 可以提升到分解上。设 $\operatorname{Ker} f_0=H, \operatorname{Ker} g_0=E$。由提升可得映射 $\varphi:H\to E$。设 $C=\operatorname{Ker}\varphi$。则有下列的交换图：

$$\begin{tikzcd}
h_{M_{n+1}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & h_{M_1} \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
h_{A_{n+1}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & h_{A_1} \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & C \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

由于任意 $i=3k, 0\leqslant i\leqslant n$，$k\in N$ 都有 $h_{M_i}\cong h_{A_i}$。则由定理 1.1 知 $C$ 是 $n$- Coherent 函子。

再由下列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & h_{M_0} \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \to & E & \to & h_{A_0} & \to & G & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & C & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

因此由 Snake 引理得正合列 $0\to C\to K\to 0$。即 $C\backsimeq K$。即 $K=\ker h$ 为 $n$-Coherent 函子。

**例** 对任意的 $M\in\mathscr{P}^{\geqslant n}$，其中 $\mathscr{P}^{\geqslant n}=\{X\in R-\mathrm{mod}\mid \mathrm{pd}X\geqslant n\}$，函子 $M\otimes -$ 是 $n$-Coherent 函子。事实上，设 $P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ 是 $M$ 的有限生成投射 $R$ 模的分解，因为张量积是右正合的，可得到下列正合列

$$P_n\otimes -\to P_{n-1}\otimes -\to\cdots\to P_0\otimes -\to M\otimes -\to 0$$

又由于 $P_i$ 是投射的且$P_i\otimes -=\mathrm{Hom}(P^*,-)=h_{P^*}$。因此 $M\otimes -$ 是 $n$-Coherent 函子。其中 $P^*=\mathrm{Hom}(P,R)$。

现在考虑 $n$-Coherent 函子的性质。

**命题** 设 $F\in\mathscr{F}$是任意的函子(不一定是 $n$-Coherent)。

(a) 存在一个自然态射函子 $\alpha: F(R)\otimes -\to F$。

(b) 函子 $F_0=\mathrm{coker}\,\alpha$ 满足性质 $F_0(R)=1$。若 $F$ 是$n$-Coherent 函子且 $pdF(R)\geqslant n$ 即有正合列

$$h_{M_n}\to h_{M_{n-1}}\to\cdots\to h_{M_1}\to h_{M_0}\to F\to 0$$

$$P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to F(R)\to 0。$$

其中 $M_i, P_i\in R$-mod, $i=0\cdots n$。如果 $n=3k+1(k\in Z)$且对于 $i=3k+2$, $0\leqslant i\leqslant n$，满足$M_i\backsimeq P_i^*$。则 $F_0$ 是 $n$-Coherent 函子。若 $F$ 是半正合的，则 $F_0$ 也是半正合的。

(c) 态射 $\alpha$:是同构当且仅当 $F$ 是右正合的。特别地，注意到 $F$ 是右正合的当且仅当是$M\otimes -$这种形式，$M\in R$-mod。

**证明** (a) $m\in M$ 定义了态射$f_m: A\to M, 1\mapsto m$。因此 $F(f_m): F(R)\to F(M)$。给定任意元素$\sum\alpha^i\otimes m_i\in F(R)\otimes M$，映射到$\sum F(f_{m_i})(a_i)\in F(M)$。

(b) $F_0(A)=0$ 显然。若 $F$ 是$n$-Coherent 函子，$pdF(R)\geqslant n$，且满足命题的条件。则由前面的例子可得 $\alpha: F(R)\otimes -$是 $n$-Coherent 函子。则 $F_0$ 是 $n$-Coherent 函子间的态射的 cokernel。再由定理 1.1 可得 $F_0$ 是 $n$-Coherent 函子。若 $F$ 是半正合的，图追踪可证明 $F_0$ 是半正合的。

(c) 若 $\alpha$ 是同构，则显然 $F=F(R)\otimes -$是右正合的。反之，若 $F$ 是右正合的，首先注意到 $\alpha(R)$是同构，因此对任意的有限生成的自由模 $\alpha(L)$是同构。对任意的 $M$，设 $L_1\to L_0\to M\to 0$是自由分解。应用 $\alpha$ 和 5-lemma，可证 $\alpha(M)$是同构。

**参考文献：**

[1] AUSLANDER M. Coherent functors[C]// Pro Conf Categorial Algebra. Berlin: Springer, 1966: 189-231.
[2] HARTSHORNE R. Coherent functor[J]. Adv Math, 1998, 140:44-94.
[3] KRAUSE H. Coherent functor and covariantly finite subcategories[J]. Algebras and Representation Theory, 2003, 6:475-499.
[4] ROTMAN J J. An introduction to homological algebra[M]. New York: Academic Press, 1979.

（编辑：李晓红）